Grupo 12 - Fractais

Nomes:	Número Usp:
Samuel Cesar Serpa de Toledo	10738252
Júlia Rocha-Lima Bentes	10737543
Rafaela Ferreira Gomes	10801600

Introdução

Um fractal é uma figura geométrica complexa que segue um padrão de construção e pode ser repetido em qualquer escala, como se a figura fosse quebrada e suas partes fossem uma reprodução da primeira. Sua abordagem e possíveis aplicações no conteúdo do Ensino Médio será objeto do desenvolvimento deste trabalho. Um dos focos principais abordados a seguir será a Curva de Koch - um dos primeiros fractais a serem descritos.

Exemplos de Fractais

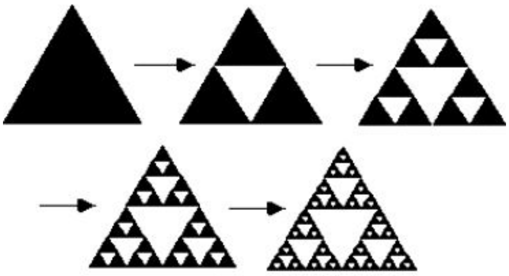

Figura 1: ilustração de um triângulo de Sierpisky

Figura 2: ilustração de um raio de luz

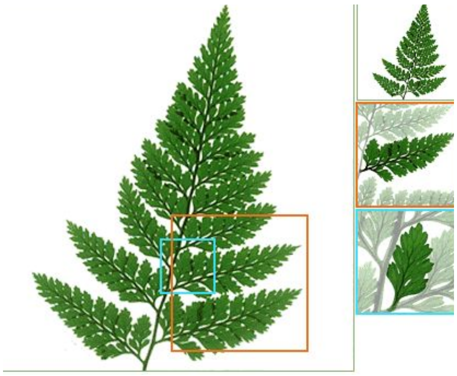

Figura 3: ilustração das folhas de uma samambaia

Figura 4: ilustração de uma fractal

Curva de Koch

História

A curva de Koch foi apresentada pelo matemático sueco Helge von Koch, num artigo de 1906, intitulado *"Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes"*, que é traduzido para "um método geométrico elementar para o estudo de certas questões da teoria das curvas planas". Koch tinha como objeto de estudo a matemática pura, equações diferenciais, álgebra, teoria dos números, mas se destacou em seu trabalho com geometria e mais especificamente, curvas.

O trabalho para obtenção da curva de Koch e do floco de neve, que segue o mesmo princípio da curva de Koch, mas feito em um triângulo equilátero, teve como motivação expor uma curva contínua e não diferenciável em todos os pontos, ou seja, que não possui tangente em nenhum dos seus pontos. Esta construção revoluciona a própria definição de diferenciável por Newton e Leibniz do século 17, tendo sido descoberto inicialmente por Karl Weierstrass uma curva com essas características.

Construção

A curva de Koch tem seu início em um segmento de reta. A seguir, efetuam-se os seguintes passos:

1. Divide-se esse segmento em três partes iguais.

2. Substitui-se o segmento médio por dois segmentos iguais, de modo que, o segmento médio e os dois novos segmentos formam um triângulo equilátero.
3. Obteve-se uma linha poligonal com quatro segmentos de comprimentos iguais.

Figura 5: ilustração dos passos 1-3 .

4. Posteriormente, repetem-se os passos 1 - 3 para cada um dos segmentos obtidos.

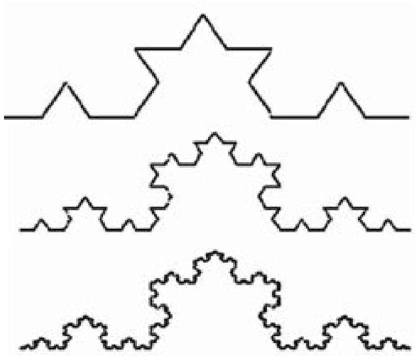

Figura 6: ilustração do passo 4

Matemática da Curva de Koch

Se considerarmos cada passo, notamos que para passar de uma linha para a seguinte, substituímos três segmentos por quatro de igual comprimento, ou seja, o comprimento total é multiplicado por 4/3. Assumindo que o primeiro estágio (segmento de reta) seja n=0 e tenha comprimento igual a 1, o segundo estágio será n=1 e terá comprimento igual a 4/3. Portanto, podemos escrever uma fórmula para se determinar o comprimento de uma curva de Koch com n etapas, a partir de um segmento de comprimento 1: $C = (4/3)^n$

Caso o comprimento inicial seja um valor diferente de 1, podemos chamá-lo de Co e a fórmula para o comprimento seria: $C = Co.(4/3)^n$.

Para um valor de n que continue sempre crescendo, ou seja, quando o limite da função C com n tende a infinito, teremos que o comprimento será infinito. Porém, podemos observar que a curva ocupa um espaço finito (delimitado pelo formato de um retângulo), mesmo quando o comprimento dessa tende a infinito.

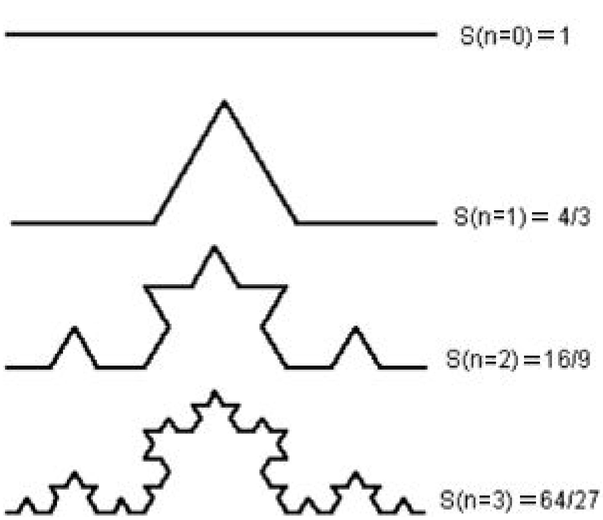

Figura 7: ilustração da progressão geométrica do comprimento da curva de Koch

Analisando a quantidade de segmentos formados nessa curva, observamos que essa quantidade de segmentos formam uma Progressão Geométrica, de razão 4, assim como o comprimento forma uma de razão 4/3.

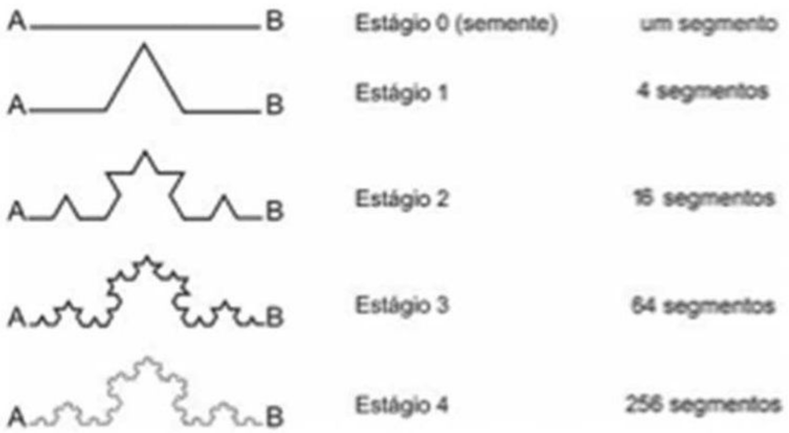

Figura 8: ilustração da progressão geométrica dos segmentos da curva de Koch

Floco de Neve

O floco de neve é uma figura também retratada por Koch e tem sua construção análoga à curva de Koch. Porém ela se inicia com um triângulo equilátero, construindo a curva de koch em cada um dos lados do triângulo.

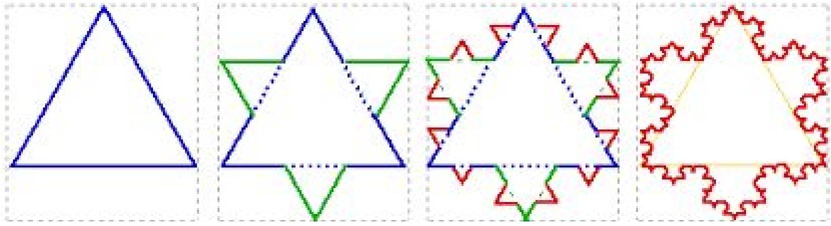

Figura 9: ilustração de uma construção de um Floco de neve

Conclusão

A Geometria Fractal é um tema recente nos documentos que orientam o ensino de Matemática, Essa matéria pode ser abordada de forma lúdica e tem sua importância até por ser um assunto visual. Desperta o interesse do aluno também por ser uma imagem que é possível observar na natureza, mesmo não sendo matematicamente um fractal e somente uma aproximação como em folhas, flocos de neve, etc. Após apresentar o conceito de fractais de forma lúdica, podemos trazer a história dos fractais, como feito por nós, para trazer uma interdisciplinaridade.

Além do próprio estudo de fractais, esse assunto retoma o ensino de geometria em um geral. Como trabalhamos para esta construção, inclusive em Koch, com as definições de reta, semirreta, segmento de reta, ponto e plano, é possível revisar os mesmos.. Também abordamos assuntos como progressão geométrica, razão e a potencialização, pois temos em sua construção os mesmos para ilustrar tanto o número de segmentos como o comprimento do mesmo em relação ao inicial.

A aula trará um conteúdo lúdico e que pode ser de grande interesse e curiosidade de alunos que não tem afinidade com matemática e junto com isso inserir diversos conceitos matemáticos que eles já conhecem, mas podem criar uma maior afinidade por terem exemplos lúdicos e formas aproximadas na natureza.

Referências:

Curva de koch

A Curva de Koch

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA UM ESTUDO DE FRACTAIS GEOMÉTRICOS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NILSON JORGE BALDO

Fractais e a geometria da natureza (página 3)

Sallum, E.M. Fractais no Ensino Médio, Revista 57, Revista do Professor de Matemática (RPM), São Paulo - SP, 2005. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/57/1.htm