Grupo:
Laura Basso Munhós – N° USP 11222436
Mauro Severino de Santana – N° USP 11298084
Rosana San Roman – Nº USP 1736591

PCoC DE MAT0315- INTRODUÇÃO À ANÁLISE

Curva de Agnesi

l. Tema: Curva de Agnesi.

2. Objetivo: Encontrar a equação da curva e relacioná-la com estudos que estamos fazendo em Introdução à Análise.

3. Metodologia: Descrever, algebricamente, a equação da curva a partir de relações encontradas nos três triângulos semelhantes, que aparecem na figura que representa o caminho descrito por um ponto da mesma. Apresentar uma animação que mostra o trajeto desse ponto.

Organizamos nosso trabalho em seções para torná-lo mais didático:

- Um pouco de história;
- Descrição da curva;
- Matemática da curva;
- Relação com Introdução à Análise;
- Utilização da curva.

Um pouco de história

Maria Gaetana Agnesi nasceu em Milão, em 1718 e faleceu na mesma cidade em 1799. Filha de Pietro Agnesi, teve uma educação privilegiada, privada e primorosa, que lhe proporcionou conhecimentos profundos em várias áreas, o que não era hábito das mulheres daquele século.

Foi o pai, que era professor da Universidade de Bolonha, que a incentivou a estudar Ciências. Para promover a educação da filha, fundou uma espécie de "círculo de intelectuais" para onde se dirigiam convidados de toda a Europa, muitos deles, estudiosos em vários campos do saber.

A jovem Maria, admirada por sua genialidade, apresentava-lhes uma variedade de assuntos, defendendo seus pontos de vista. Os assuntos incluíam lógica, filosofia, mecânica, química, botânica, zoologia e mineralogia.

Maria Gaetana também era versada em línguas: aos cinco anos, já era fluente em francês e, aos nove, traduziu para o latim e publicou um discurso defendendo um ensino mais elevado para as mulheres, pois, naquela época pouquíssimas tinham acesso à educação.

Aos treze anos, além de italiano e latim, sabia cinco outras línguas: grego, hebreu, francês, espanhol e alemão.

Em 1738, publicou estudos filosóficos: "*Propositiones philosophicae"*, uma coleção de suas teses, contendo complexos ensaios de ciências naturais e filosofia.

Maria Gaetana confessou ao pai preferir uma vida mais discreta, concentrando seus estudos na Religião e Matemática. Conheceu Ramiro Rampinelli, professor de matemática da Universidade de Roma e também de Bolonha, quem a ajudou a estudar os textos de Cálculo do matemático Reyneau.

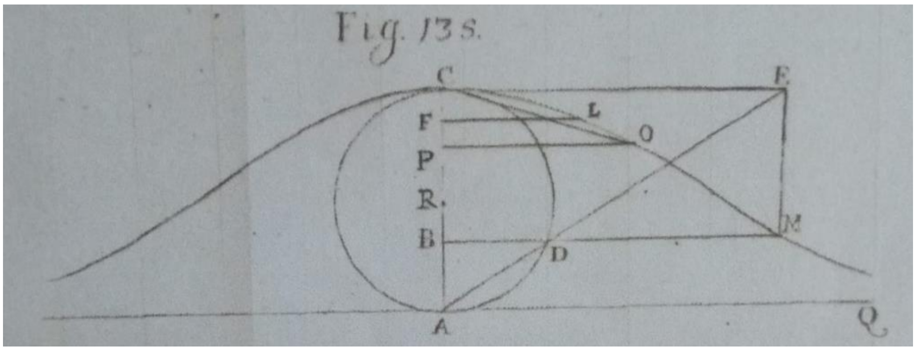
Em 1748 publicou *"Instituzioni Analitiche ad uso della Gioventù Italiana"*, uma obra em dois volumes, com temas de álgebra, Geometria e Cálculo Infinitesimal. Elogiado pela Academia de Ciências de Paris como uma obra onde *"a ordem, clareza e precisão reinam em todas as partes deste trabalho... Nós o consideramos como o mais completo e melhor tratado já feito."*

INSTITUZIONI
ANALITICHE
AD USO
DELLA GIOVENTU' ITALIANA
DI D.NA MARIA GAETANA
AGNESI
MILANESE
Dell'Accademia delle Scienze di Bologna.
TOMO I.

IN MILANO, MDCCXLVIII.
NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

O primeiro volume trata de análise de quantidades finitas, problemas de máximo e mínimo, tangentes, pontos de inflexão. Também trata de análise de quantidades infinitamente pequenas, cálculo integral, método inverso das tangentes e equações diferenciais. Devemos lembrar que na metade do século dezoito, o cálculo se apresentava em estágio de desenvolvimento.

No volume dois é apresentada uma extensa discussão sobre a curva, conhecida como “Bruxa de Agnesi”. No *Instituzioni Analitiche*:

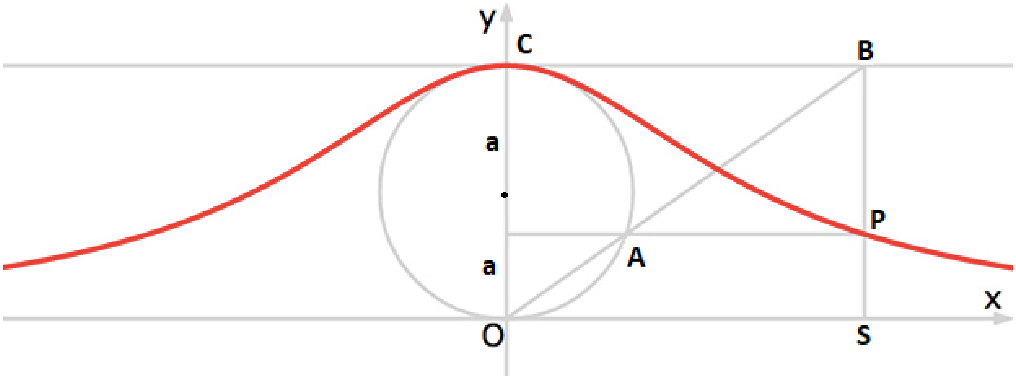


Em 1750, Maria foi convidada a ocupar a cadeira de Matemática na Universidade de Bolonha, mas não chegou efetivamente a lecionar lá. Em 1952, após a morte de seu pai, que desde cedo a incentivou nos estudos, ela vendeu seus pertences para criar uma casa de repouso para os pobres, passando a dedicar-se à vida religiosa e ao trabalho social na sua paróquia.

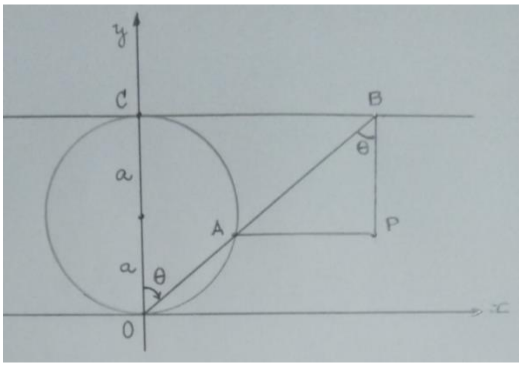
A curva acabou ganhando o nome curioso de “Bruxa de Agnesi” devido a um erro de tradução. Conta-se que o matemático John Colson (1680-1760), professor em Cambridge, aprendeu italiano apenas para traduzir a obra de Agnesi para o inglês. Equivocou-se ao ler “la versiera de Agnesi”, que significa curva de Agnesi, como “l’avversiera” que, em italiano, significa bruxa.

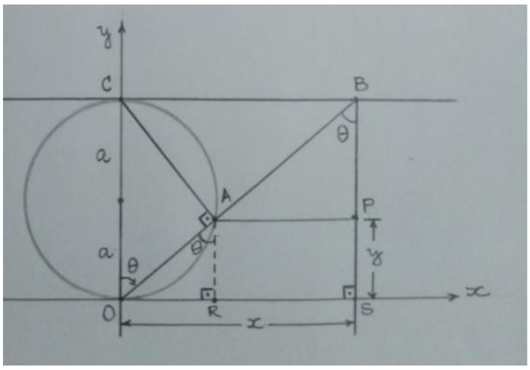
Desde então, em muitas línguas, a curva ficou conhecida por este nome. A “bruxa de Agnesi” já havia sido estudada anteriormente por Pierre de Fermat, em 1630, mas somente em 1703 ganhou uma construção feita por Guido Grandi. O mérito de Agnesi foi o de tornar o estudo da curva acessível aos jovens.

Descrição da curva



- Fixe uma circunferência de raio a e tome um ponto O(0,0) nela;
- Tome A na circunferência (A≠0), trace a secante AO;
- Seja C o ponto diametralmente oposto a O;
- Trace a reta tangente à circunferência no ponto C;
- A intersecção da reta OA com a tangente à circunferência no ponto C nos dá o ponto B;
- Por A, traça-se uma reta paralela a CB;
- Por B, traça-se uma reta paralela a OC;
- Seja P o ponto de intersecção entre essas duas retas;
- O caminho que o ponto P descreve ao variarmos o ponto A sobre a circunferência é a curva de Agnesi.





Matemática da curva

A curva de Agnesi é o lugar geométrico de P quando $0<\theta<\pi$, onde θ é o ângulo entre AO e o eixo-y.

<u>Forma paramétrica:</u>

Na figura temos três triângulos retângulos semelhantes: **∆ORA**, **∆CAO** e **∆OSB**.

No triângulo ∆**CAO**:

▪ ângulo ∠CAO = 90°, pois a hipotenusa é diâmetro;

▪ $cos\theta = \frac{OA}{OC} \Rightarrow \quad OA = OC.cos\theta \ = 2.a.cos\theta$ (1)

No triângulo ∆**OSB**:

▪ ângulo ∠OSB = 90°, pois BS é perpendicular ao eixo-x;

▪ $tg\theta = \frac{OS}{BS}$ mas OS = x e BS = $2a$

▪ $tg\theta = \frac{x}{2a} \Rightarrow \quad x = 2a.tg\theta$ (2)

No triângulo ∆**ORA**:

▪ ângulo ∠ORA = 90°, pois AR é perpendicular ao eixo-x;

▪ $cos\theta \ = \ \frac{AR}{OA}$ mas AR = y

▪ $cos\theta \ = \ \frac{y}{OA} \ \Rightarrow$ y = $OA.cos\theta$ (3)

Mas, de (1) temos: OA = $2a$.cosθ e, substituindo em (3) vem:

$y \ = \ 2a.cos\theta.cos\theta \ = \ 2a.cos^2\theta$ (4)

Portanto, as coordenadas paramétricas da curva são:

$$x \ = \ 2a.tg\theta$$

$$y \ = \ 2a.cos^2\theta$$

Forma cartesiana:

Para obtermos a equação cartesiana da curva, eliminamos θ nas equações (2) e (4):

Assim, de (2): $tg\theta = \frac{x}{2a}$

Sabemos que $cos^2\theta + sen^2\theta = 1$ (relação fundamental da trigonometria).

Dividindo-se ambos os lados da igualdade por $\cos^2\theta$, temos:

$$\frac{cos^2\theta}{cos^2\theta} + \frac{sen^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta} \Rightarrow 1 + tg^2\theta = \frac{1}{cos^2\theta} \qquad (5)$$

Por outro lado, de (2): $tg\theta = \frac{x}{2a}$ e $tg^2\theta = \frac{x^2}{4a^2}$

Substituindo em (5): $1 + \frac{x^2}{4a^2} = \frac{1}{cos^2\theta} \Rightarrow \frac{4a^2+x^2}{4a^2} = \frac{1}{cos^2\theta}$

Invertendo, temos: $cos^2\theta = \frac{4a^2}{x^2+4a^2}$ (6)

Finalmente, substituindo em (4), conseguimos expressar y em termos de x:

$y = 2a.cos^2\theta = 2a.\frac{4a^2}{x^2+4a^2}$

Logo, $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ ou $y = \frac{(2a)^3}{x^2+(2a)^2}$ (7)

que é a equação cartesiana da curva.

Estudo da curva em Análise Real

Várias conclusões seguem dessa equação. Para facilitar nosso estudo vamos tomar o raio $\boldsymbol{a} = ½$:

$y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2} \Rightarrow$ se tomarmos $a = ½$, temos:

$$y = \frac{8.(\frac{1}{2})^3}{x^2+4.(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

Vamos estudar alguns aspectos dessa curva particular:

Note que, quando $x\rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow 0$, e o eixo-x é uma assíntota da curva:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

A função f:]-∞,+∞[→ ℝ é contínua, pois é um quociente cujo denominador é uma função polinomial (x^2+1). Além disso, y nunca é igual a 0, já que o denominador $(x^2+1)>0$ e a curva nunca cruza o eixo-x.

Vamos estudar seu crescimento/decrescimento através do cálculo de sua derivada, usando a Regra do Quociente e a Regra da Cadeia:

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{0 \cdot (x^2+1) - 1 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

Note que a curva cresce no intervalo $]-\infty, 0[$ onde $f'(x)>0$ e decresce no intervalo $]0, +\infty[$ onde $f'(x)<0$. Determinando o valor de sua derivada no ponto 0(zero), temos: $f'(0) = \frac{2.0}{(0^2+1)^2} = 0$

Observamos que a reta tangente é horizontal nesse ponto.

Pontos críticos da curva:

A função f(x) é contínua em $]-\infty, +\infty[$ e infinitamente derivável. Dá para calcular f'', f''', f'''', etc.

$f''(x) = \frac{-2.(x^2+1)^2 - (-2x).2.(x^2+1).2x}{[(x^2+1)^2]^2} = \frac{2.(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

- $3x^2-1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ (pontos de inflexão, mudança na curvatura da curva)
- $(x^2+1)^3 > 0$ para qualquer x real.

Note que 0 (zero) é ponto de máximo porque a função f(x) é crescente para x<0 e decrescente para x>0.

Estudo dos sinais:

___ $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ ___ 0___ $+\frac{\sqrt{3}}{3}$ ___

__+__|__-__|__-__|__+__ $3x^2-1 = g(x)$

__+__|__+_ |__+_ |__+__ $(x^2+1)^3 = h(x)$

__+__|__-__|__-__|__+__ g(x)/h(x)

∪ | ∩ | ∩ | ∪ (concavidade)

Área sob a curva

Usando o fato de que a curva é simétrica em relação ao eixo-y e, através do Cálculo, pode-se mostrar que a área compreendida entre a curva e sua assíntota é $4\pi a^2$, ou quatro vezes a área do círculo de raio a, fixado anteriormente:

$2.\int_0^{\infty} y\,dx = 2.\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{8a^3}{x^2+4a^2}dx = 2.\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{8a^3}{4a^2.[(\frac{x^2}{4a^2})+1)]}dx =$

$2.\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{8a^3}{4a^2.[(\frac{x^2}{4a^2})+1)]}dx$

Fazendo mudança de variável:

$x/2a = tg(u) \Rightarrow u = arctg(\frac{x}{2a)}$

$x = 2a.tg(u) \Rightarrow dx = 2a.sec^2(u)du$

Para x=0 →u=0
Para x=t→u=arctg(t/2a)

Segue que $2.\lim_{t\to\infty}\int_0^{arctg(t/2a)} \frac{2a.2a.sec^2(u)}{1+tg^2(u)}du = 8a^2.\lim_{t\to\infty}\int_0^{arctg(t/2a)} \frac{sec^2}{sec^2}du =$
$8a^2.\lim_{t\to\infty}(arctg(t/2a) - arctg(0)) = 8a^2.(\frac{\pi}{2} - 0) = 4a^2.\pi = 4\pi a^2.$

A curva e sua utilização

Bastante comum na modelagem de certos fenômenos físicos, a curva está relacionada a funções de probabilidade, como a distribuição de Cauchy:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

cuja equação, a menos das constantes, é equivalente à da curva.

É utilizada, também, na aproximação de energia espectral de linhas espectrais, particularmente linhas de raios-X.

A seção transversal de uma colina suave tem uma forma semelhante à curva de Agnesi. Curvas com esta forma foram usadas como obstáculo topográfico genérico em um fluxo na modelagem matemática. Sabe-se que ondas solitárias profundas também podem ter essa forma.

Sobre o ensino da curva na Escola Básica, é possível fazer a dedução das coordenadas do ponto P comparando-se os triângulos retângulos da figura, conteúdo estudado nesse nível.

A grande relevância do trabalho de Agnesi, como já dito pela Academia de Ciências de Paris, é "a clareza e a precisão" de seu trabalho, sendo reconhecida como a primeira mulher matemática a produzir textos de alta qualidade científica.

Referências bibliográficas:

- MAOR, Eli. *Trigonometric Delights*, Editora: Princeton University, 1998.
- https://pt.wikipedia.org/wiki/Curva_de_Agnesi
- https://impa.br/noticias/31-de-outubro-dia-de-celebrar-a-bruxa-de-agnesi/