PCoC - MAT0315

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DA SOMA DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Ana Carolina Leite (Nº USP: 9456669)
Beatriz Hernandes Bernardes (Nº USP: 11222742)
Danielle Velloso Ferreira (Nº USP: 11276534)
Raphaela Miazato Caprera (Nº USP: 11222951)

Instituto de Matemática e Estatística (IME - USP)

Introdução

Uma Progressão Geométrica (P.G.) é uma sequência de números reais cuja razão de um elemento pelo seu antecessor é uma constante, que chamaremos de r. O n-ésimo termo da sequência é denotado por a_n. Usando os conhecimentos de sequências e séries, no caso específico em que $-1 < r < 1$, podemos mostrar que a soma infinita dos elementos da P.G. converge e é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

O tema das Progressões Geométricas é parte do currículo do Ensino Médio. O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração para a soma de uma P.G., usando elementos da geometria euclidiana e da trigonometria, com os quais os alunos do Ensino Médio têm mais familiaridade. Além disso, discutiremos a importância e a validade de demonstrações no Ensino Básico, sobretudo com o uso da geometria na visualização de problemas algébricos e a relação entre a geometria métrica e a análise.

Demonstração

Para essa demonstração, note que, como -1 < r < 1, podemos escrevê-lo como o cosseno de um ângulo θ, com $0 < \theta < \pi$, logo $\theta = \arccos(\mathrm{r})$.

Para 0 < r < 1:

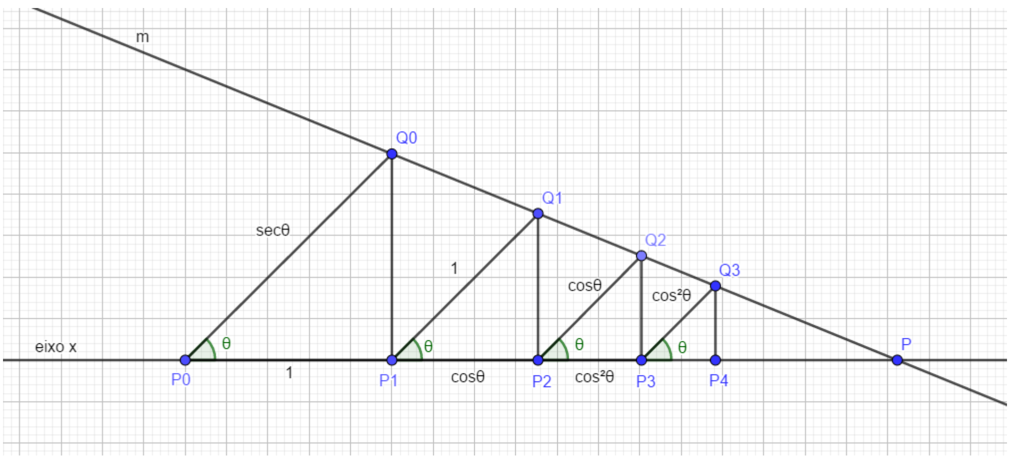

Figure 1: Construção da demonstração para $0 < \mathrm{r} < 1$

Nesta parte consideraremos $\theta = \arccos(\mathrm{r})$, com $0 < \theta < \pi/2$. Vamos começar a construção fixando um ponto P_0 como origem do eixo x e P_1 o ponto x = 1. Em P_1, traçamos a reta r_1 que forma o ângulo θ com a horizontal. Seja P_1Q_1 o segmento unitário contido em r_1. Agora, traçamos a perpendicular ao eixo x passando por Q_1, que irá interceptar o eixo x em P_2. Por trigonometria no triângulo $P_1Q_1P_2$, temos:

$$cos\theta = \frac{P_1P_2}{1} \Rightarrow P_1P_2 = cos\theta \Rightarrow P_0P_2 = 1 + cos\theta$$

Repetimos o processo partindo de P_2, mas agora tomamos P_2Q_2 medindo cosθ, ou seja, $P_2Q_2 = P_1P_2$. Esse processo pode ser repetido infinitas vezes, tomando P_nQ_n = $P_{n-1}P_n$. Note que $\Delta P_1Q_1P_2 \sim \Delta P_2Q_2P_3$ ... , logo Q_1, Q_2, ..., Q_n são colineares e pertencem a uma reta m. Vamos provar que a intersecção de m com o eixo x, que chamaremos de P, é a soma S da P.G. Primeiro, observe que $P_1Q_1 = 1, P_2Q_2 = cos\theta, P_3Q_3 = cos^2\theta$ formam um P.G. de razão $r = cos\theta$. Façamos a construção anterior partindo de P_0, onde Q_0 é a intersecção de m com a reta partindo de P_0 que forma o ângulo θ com a horizontal. Observe que a perpendicular a Q_0 com o eixo x é o ponto P_1, por semelhança de triângulos. Então, por trigonometria no triângulo $P_0Q_0P_1$, temos:

$$cos\theta = \frac{1}{P_0Q_0} \Rightarrow P_0Q_0 = \frac{1}{cos\theta} = sec\theta$$

Note que:

$$\Delta P_0Q_0P \sim \Delta P_1Q_1P \sim ... \Rightarrow \frac{P_0P}{P_0Q_0} = \frac{P_1P}{P_1Q_1} \Rightarrow \frac{S}{sec\theta} = \frac{S-1}{1} \Rightarrow$$

$$Scos\theta = S - 1 \Rightarrow Sr = S - 1 \Rightarrow S - Sr = 1 \Rightarrow S(1-r) = 1$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1-r}$$

Logo P_0P tem medida igual à soma S da P.G..

$\square$

Para -1 < r < 0:

Nesta parte, apresentaremos apenas as particularidades do caso. A construção inicial, tomando P_0 na origem, P_1 em x = 1, e assim por diante, são análogas ao caso anterior. Agora, como $-1 < r < 0$, então temos $\pi/2 < \theta < \pi$. Os triângulos, desta vez, se encontram alternados ao redor de P, devido ao ângulo ser obtuso. Para os $P_{n's}$ tais que n é um número par, construiremos a reta que forma o ângulo θ com a horizontal e tomaremos Q_n no semiplano y < 0.

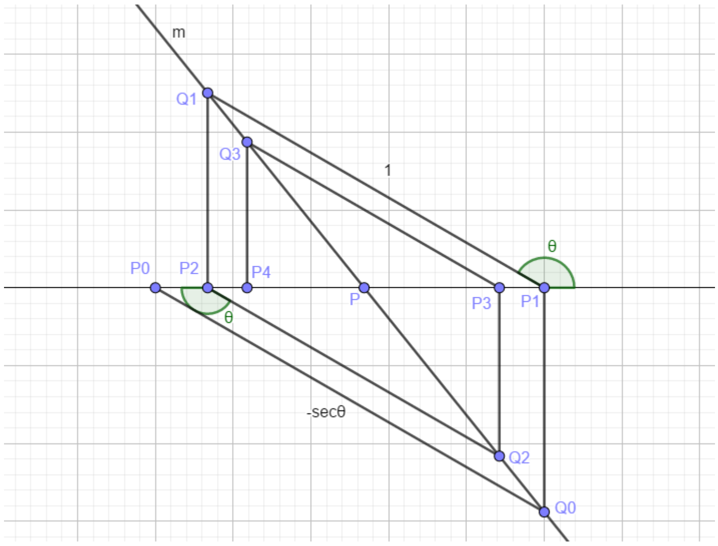

Figure 2: Construção da demonstração para -1 < r < 0

Vamos provar, novamente, que a intersecção da reta m com o eixo x, que chamaremos de P, é a soma S da P.G. Para isso, observe que podemos regredir a construção a P_0Q_0, como na imagem. Assim, por trigonometria no triângulo $\Delta Q_0P_0P_1$, temos:

$$cos(\pi - \theta) = -cos(\theta) = \frac{P_0P_1}{P_0Q_0} = \frac{1}{P_0Q_0} \Rightarrow P_0Q_0 = -sec(\theta)$$

Por semelhança nos triângulos ΔP_0PQ_0 e ΔP_1PQ_1, temos:

$$\frac{P_0P}{-sec\theta} = \frac{PP_1}{1} \Rightarrow \frac{S}{-sec\theta} = \frac{1-S}{1} \Rightarrow -Scos\theta = 1 - S$$

$$\Rightarrow S - Sr = 1 \Rightarrow S(1-r) = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{1-r}$$

$\square$

Observação

A demonstração foi feita para $a_1 = 1$, mas caso $a_1 \neq 1$, basta considerar o caso $a_1 = 1$ pois:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1.r^n = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} r^n = a_1.S = \frac{a_1}{1-r}$$

onde S é a soma da P.G. de $a_1 = 1$ e razão $r = cos\theta$.

Discussão

Nesta parte, vamos analisar dois aspectos que envolvem a demonstração feita. Primeiro, discutiremos a validade de abordar essa demonstração em sala de aula no Ensino Médio. Depois, veremos quais fatores permitem demonstrarmos resultados analíticos usando a geometria métrica.

Progressões Geométricas e a demonstração no Ensino Médio

A Progressão Geométrica é um conteúdo destinado ao Ensino Médio, mas a noção de sequências percorre toda a educação básica. Segundo Oliveira (2019), as sequências são ensinadas com objetivo de, também, auxiliar o ensino de outras áreas da matemática. No caso da P.G., ela auxilia na compreensão da função exponencial e das noções de matemática financeira. Já a demonstração tem sua importância, pois auxilia na visualização do padrão algébrico por meio da geometria. Conforme Soares (2012), "as demonstrações, no melhor dos casos, aumentam o entendimento, mostrando o que é essencial no assunto".
A demonstração deste trabalho propõe uma nova visão das progressões geométricas. O uso da geometria pode ajudar os alunos a compreenderem melhor como uma soma de infinitos termos pode ter, como resultado, um valor finito. Ainda, ela mostra uma aplicação de conhecimentos que os alunos já tiveram contato anteriormente, como semelhança de triângulos, relações trigonométricas no triângulo retângulo e razão e proporção, além de abordar como conteúdos matemáticos podem ser vistos de formas diferentes, mostrando uma solução criativa para o problema da soma infinita.
É importante, no entanto, ter em mente que a matemática no Ensino Básico possui menos preocupação com rigor, e apelar para muita formalização pode até mesmo dificultar o entendimento dos alunos acerca do conteúdo abordado. A demonstração apresentada neste trabalho pode ser muito útil, à medida que propõe uma visão diferente das progressões geométricas, mostrando uma aplicação de alguns conhecimentos prévios dos alunos, mas não é necessário que seja abordada com todos os seus detalhes. A construção e demonstração do caso $r>0$ já são suficientes para que os objetivos do uso da demonstração em sala de aula sejam atingidos.

A Geometria Métrica e a Análise

Por mais que, na educação brasileira, haja uma tradição de separar a matemática em frentes de geometria e álgebra, estas áreas estão mais interligadas do que se faz parecer. Isso porque, tanto a geometria métrica, quanto a análise real envolvem o estudo do contínuo. Pelo estudo da geometria métrica, associam-se os pontos de uma reta aos números reais e, ao definir-se a medida de radianos e o ciclo trigonométrico, passa a haver uma associação entre ângulos e o conjuntos dos reais. Sendo assim, existe uma associação entre os dois elementos principais da geometria métrica plana e os números reais, que são o objeto de estudo da análise. É essa ligação entre as duas áreas que permite fazermos demonstrações como a apresentada neste trabalho, o que proporciona que conteúdos como o da Progressão Geométrica sejam vistos de uma forma distinta da tradicional.

Referências

1. Maor, E. *Trigonometrics Delights*, Princeton University Press, 1998
2. Soares, Nascimento Afro, Brito, Souza *Demonstrações matemáticas na educação básica: com a palavra os professores de matemática*, 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012
3. Oliveira, W. *Ensino de sequências: dos parâmetros curriculares nacionais à base nacional comum curricular*, XXIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2019