Grupo 6

Componentes:

Gabriel Goya Lotério - 11223097

Marcos Eidi Tamura

Rogerio Yukio Muraki - 9862818

A irracionalidade do Número *e*

Introdução:

A proposta deste trabalho consiste em demonstrar a irracionalidade do número e.

O número e tem sua primeira aparição em 1683 com Jacob Bernoulli (1654-1705) que buscava, por meio dos juros compostos, descobrir o valor máximo de juros em empréstimos. A proposta consistia em depositar um valor no banco e adicionar os juros acumulados tanto quanto possível à quantia inicial depositada, maximizando-se seu ganho. A partir dessa ideia de Bernoulli tivemos a primeira aproximação para o número $e = 2{,}71828\ldots$.

A notação e foi aplicada em 1727 por Leonhard Euler (1707 - 1783), que estudando um problema proposto por Bernoulli, que se baseiam em juros compostos, chegou ao resultado de 2,71828... . Porém, este número já era conhecido por John Napier, em seus estudos sobre logaritmo, por isso é comum que o número possa ser encontrado como Número de Neper.

A seguir veremos meios de como obter o número e e como foi determinada a sua irracionalidade, ou seja, ele não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e primos entre si..

Desenvolvimento:

Uma demonstração interessante que trabalha a irracionalidade do número *e* pode ser observada a seguir:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Suponha agora que $e = \frac{p}{q}$ com p,q $\varepsilon N,\ q \neq 0$

$$\frac{p}{q} = (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}) + \frac{1}{(q+1)!} + ... \Rightarrow$$

$$0 < \frac{p}{q} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}) = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + ... = \sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!}$$

Note que:

$$\frac{1}{(q+1)!} = \frac{1}{(q+1)q!}$$

$$\frac{1}{(q+2)!} = \frac{1}{(q+2)(q+1)q!}$$

E assim por diante.

Então

$$\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + ... = \frac{1}{q!}(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + ...)$$

Mas como

$$0 < q+1 < q+2 < q+3 < ... \Rightarrow \frac{1}{q+1} > \frac{1}{q+2} > \frac{1}{q+3} > ...$$

Então

$$\frac{1}{(q+1)^2} > \frac{1}{(q+1)(q+2)},\ \frac{1}{(q+1)^3} > \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}...$$

Logo,

$$0 < \frac{1}{q!}(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + ...) < \frac{1}{q!}(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + ...)$$

Mas

$$\{\frac{1}{q+1}, \frac{1}{(q+1)^2}, \frac{1}{(q+1)^3}, \ldots\}$$

é uma PG de razão $\frac{1}{q+1}$ e a sua soma infinita pode ser calculada por

$$\frac{\frac{1}{q+1}}{1-(\frac{1}{q+1})} = \frac{1}{q+1}\frac{q+1}{q} = \frac{1}{q}$$

Daí,

$$0 < \frac{p}{q} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!}) = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \ldots < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}$$

$$0 < \frac{p}{q} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!}) < \frac{1}{q!}\frac{1}{q} \Rightarrow$$

$$0 < q!(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{q!}) < \frac{1}{q} \leq 1$$

Observe que o termo destacado acima é um número inteiro, pois $q|q!$, $1|q!$ e $k!|q!\ \forall k \leq q$

Mas isso é um absurdo, pois não existe número inteiro positivo menor que um.

Outra demonstração da irracionalidade do número *e* pode ser feita da seguinte forma:

Vamos primeiro obter uma estimativa do erro R_n que cometemos no cálculo deste número quando o aproximamos pela soma parcial S_n da série anterior (que vai até 1/n!). Temos:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right)$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + (n+2)^{-1} + (n+2)^{-2} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n!\,n}$$

Podemos então escrever: $S_n < e < S_n + R_n < S_n + \frac{1}{n!\,n}$

Se *e* fosse racional, isto é, se *e* = *m/n*, com *m* e *n* inteiros positivos, $n \geq 2$ (aqui assumimos que *e* não é um inteiro, já que está entre 2 e 3), então:

$$S_n < \frac{m}{n} = S_n + R_n < S_n + \frac{1}{n!\,n}$$

de onde segue-se que:

$$n!\,S_n < m(n-1)! < n!\,S_n + \frac{1}{n} < n!\,S_n + 1$$

Porém, o número $n!\,S_n$ é inteiro, dada a igualdade:

$$n!\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = 2n! + \frac{n}{2!} + \frac{n}{3!} + \ldots + \frac{n}{n!}$$

Então, da desigualdade anterior, temos que o número inteiro $m(n-1)!$ está compreendido entre os inteiros consecutivos $n!\,S_n$ e $n!\,S_n + 1$, um absurdo.

Pelo o que vimos acima, S_n é uma aproximação do número *e* com erro inferior a $(\frac{1}{n})(\frac{1}{n!})$. Como $n!$ cresce muito rapidamente com n, S_n é realmente uma boa aproximação de *e*, mesmo para n não muito grande. Por exemplo, $n = 10$ já nos dá um erro inferior a 10^{-7}. Euler calculou o número *e* com 23 casas decimais, obtendo *e* = 2,71828181845904523536028.

Resolução do exercício 3(a) da lista 4:

Resumidamente, iremos provar que a definição por limite e por série do número e levam ao mesmo número.

Posso definir o número e pelo $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Expandindo $(1+\frac{1}{n})^n$ como um binômio de newton, tenho:

$$(1+\tfrac{1}{n})^n = 1^n + \tfrac{n!}{1!(n-1)!} * 1^{n-1} * \tfrac{1}{n} + \ldots + \tfrac{n!}{j!(n-j)!} * 1^{n-j} * \left(\tfrac{1}{n}\right)^j + \ldots + \tfrac{n!}{n!(n-n)!} * \left(\tfrac{1}{n}\right)^n,$$

com $1 \le j \le n$.

Para os primeiros 4 termos, temos:

$$1 + \frac{n!}{(n-1)!} * \frac{1}{n} + \frac{n!}{2!(n-2)!} * \frac{1}{n^2} + \frac{n!}{3!(n-3)!} * \frac{1}{n^3}$$

Simplificando, chega-se a:

$$1 + n * \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} * \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} * \frac{1}{n^3}$$

E então:

$$1 + 1 + \frac{n-1}{2!n} + \frac{n^2-3n+2}{3!n^2} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}$$

Perceba que temos os 4 primeiros termos da série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ com algum resto.

Para o termo geral:

$$\frac{n!}{j!(n-j)!} * 1^{n-j} * \left(\frac{1}{n}\right)^j = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-j+1)}{j!} * \frac{1}{n^j}$$

No numerador, temos um produto de j fatores, o que nos levará a um polinômio de grau j e no denominador temos n^j.

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-j+1)}{j!} * \frac{1}{n^j} = \frac{n^j+a_1n^{j-1}+a_2n^{j-2}+\ldots+a_in^{j-i}+\ldots+a_j}{j!n^j} = \frac{n^j}{n^j}\frac{(1+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_i}{n^i}+\ldots+\frac{a_j}{n^j})}{j!}$$

com cada a_i sendo um número inteiro e i um inteiro tal que $1 \le i \le j$.

Por fim, temos:

$$\frac{n^j}{n^j}\frac{(1+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_i}{n^i}+\ldots+\frac{a_j}{n^j})}{j!} = \frac{(1+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_i}{n^i}+\ldots+\frac{a_j}{n^j})}{j!} = \frac{1}{j!} + \frac{(\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_i}{n^i}+\ldots+\frac{a_j}{n^j})}{j!}$$

Perceba que quando $n \to \infty$, o resto $\frac{(\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_i}{n^i}+\ldots+\frac{a_j}{n^j})}{j!}$ tende a 0, pois cada termo tende a 0.

Portanto, a sequência $(1+\frac{1}{n})^n$ se aproxima de

$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{j!} + ... + \frac{1}{n!}$, que é a própria série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Então, $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Conclusão:

Apesar da demonstração ser muito elaborada e não ser possível apresentá-la para alunos do ensino médio, algumas coisas podem ser trabalhadas com eles, por exemplo:

- O número e é irracional;
- É um número entre 2 e 3;
- É um número muito estudado desde o século 18 e continua até os dias de hoje, com descobertas cada vez mais importantes;
- Apresentar livros escritos só para falar sobre o número e;
- A função exponencial de base *e* é uma das mais importantes em matemática por ter propriedades exclusivas (como por exemplo a derivada do número *e* ser igual a ela mesma, uma característica muito importante para a ciência)

Referências:

JOSEANE. O que é a constante matemática chamada de "número de Néper"? Disponível em: <https://www.superprof.com.br/blog/saiba-tudo-sobre-o-logaritimo-natural/>.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de Cálculo, vol 1,5a edição, LTC.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza.Análise Matemática para Licenciatura, 3a. edição, Edgard Blücher, 2009.