Matemática III

$2^{\underline{o}}$ Semestre de 2020

$5^{\underline{a}}$ Prova - Peso 1 - 2020

1. **Entrega: Até <u>10/01/2021</u>**
2. Cada aluno deve escolher 10 "Afirmações" para analisar, responder, justificar e entregar. Deve também apresentar, **no início do seu arquivo**, a tabela abaixo preenchida com suas 10 escolhas.

Tabela a ser preenchida que deve vir no início de seu arquivo:

Afirmação	V ou F?	Afirmação	V ou F?	Afirmação	V ou F?
Afirmação 1		Afirmação 7		Afirmação 13	
Afirmação 2		Afirmação 8		Afirmação 14	
Afirmação 3		Afirmação 9		Afirmação 15	
Afirmação 4		Afirmação 10		Afirmação 16	
Afirmação 5		Afirmação 11		Afirmação 17	
Afirmação 6		Afirmação 12		Afirmação 18	

Responda se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa, e justifique.

Afirmação 1 Num espaço métrico (M, d), se $A \subset M$ então $\mathring{A}$ é a união de todos os abertos contidos em A.

Afirmação 2 Num espaço métrico (M, d), $A \subset M$ é fechado se e só se $A = A'$.

Afirmação 3 O subconjunto $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 3y + z^2 \geq 1 \text{ e } xyz = 3\} \subset \mathbf{R}^3$ é fechado em $\mathbf{R}^3$.

Afirmação 4 O conjunto das soluções do sistema de inequações abaixo é aberto de $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} x^4 + 3y + z^3 - \sin(xy^2 + z) &> 0 \\ x - 2y + 3z^2 &< 0 \\ e^x + z^3 &> 0 \end{aligned}$$

Afirmação 5 No espaço métrico $\mathbf{Q}$ dos números racionais com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbf{Q}$, todo subconjunto fechado e limitado é compacto.

Afirmação 6 O conjunto $\{x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x\| \leq 1 \text{ e } x_1^3 - 3x_2^2 x_3 + x_1 \cos(x_2 + 2x_3) \geq 0\}$ é compacto em $\mathbf{R}^3$.

Afirmação 7 Se $f : A = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ é contínua e $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ uma sequência de Cauchy em A então $(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ resulta de Cauchy em $\mathbf{R}^3$.

Afirmação 8 Se $f : A = (0,1) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ é contínua e $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ uma sequência de Cauchy em A então $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ resulta de Cauchy em $\mathbf{R}^3$.

Afirmação 9 Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ é Lipschitziana e $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ uma sequência de Cauchy então $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ resulta de Cauchy em $\mathbf{R}^3$.

Afirmação 10 Sejam $M = \mathbf{R}^n$ com a métrica usual d e $N = \mathbf{R}^n$ com a métrica discreta d_*. Então $f : M \to N$ definida por $f(x) = x, \forall x \in M$ é contínua.

Afirmação 11 Sejam $M = \mathbf{R}^n$ com a métrica usual d e $N = \mathbf{R}^n$ com a métrica discreta d_*. Então $g : N \to M$ definida por $f(x) = x, \forall x \in M$ é contínua.

Afirmação 12 Seja (M, d) um espaço métrico. Se $K \subset M$ é compacto e $F \subset K$ é fechado não vazio, então F é compacto.

Afirmação 13 Se (M, d) um espaço métrico compacto, então ele é completo.

Afirmação 14 No conjunto dos números racionais $\mathbf{Q}$ com a métrica usual, existem um subconjunto A infinito, limitado, sem ponto de acumulação, e um subconjuntos B infinito, limitado, com ponto de acumulação.

Afirmação 15 Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ contínua. Então existe $\overline{x} \in [0,1] \times [0,1]$ tal que $f(x) \leq f(\overline{x}), \forall x \in [0,1] \times [0,1]$.

Afirmação 16 A função $f : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad y^2 + z^2 = 30\} \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = \left(xz^2\cos(y^2) - ye^{xz}, x^3z^2 + 3x^2yz - y^3z^3\right)$, é limitada.

Afirmação 17 Toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ em $X = B_{17}(O) \subset \mathbf{R}^2$ tem subsequência que converge para algum ponto de X.