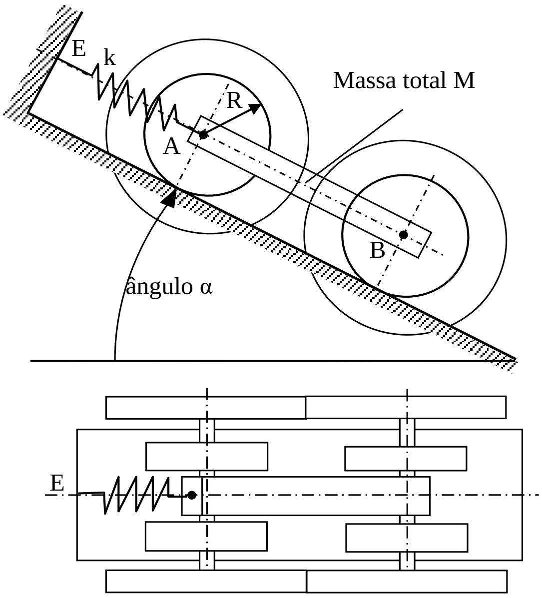
PME 3400 Exercício 3 30/06/20

Prof. Francisco E. B. Nigro

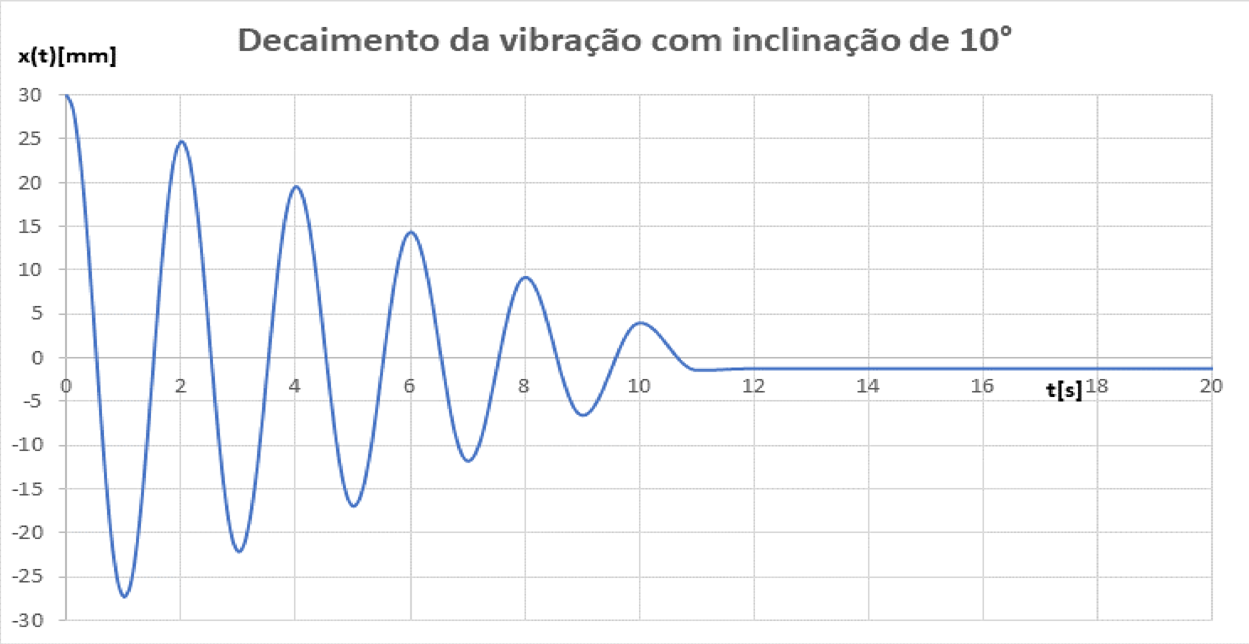
O sistema representado na figura é constituído de um carro de massa total **M**, construído essencialmente de dois eixos idênticos de momento de inércia $\mathbf{J_A=J_B=J}$, que podem girar em mancais de deslizamento em um chassi de massa desprezível. O “veículo” está apoiado em uma rampa, inclinada de um ângulo **α** em relação à horizontal, por quatro rodas de raio **R** que rolam sem escorregar sobre a rampa. Discos de raio maior que **R** ficam externos à rampa e possibilitam que **J** seja maior que $\mathbf{M \cdot R^2/2}$. O chassi que suporta os eixos está fixado por uma mola de aço de rigidez **k** a um ponto fixo, conforme ilustrado na figura, que apresenta tanto a vista lateral como a de topo da configuração. Sabendo-se que pode existir dissipação de energia no sistema, tanto por atrito de escorregamento entre os eixos e os mancais no chassi, como por resistência ao rolamento das rodas de borracha sobre a rampa, pede-se:



a) A equação diferencial do movimento do veículo ao longo da rampa no tempo, para pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio, admitindo-se conhecida uma força de resistência ao movimento equivalente a um atrito de escorregamento, além de **M**, **R**, **J**, **k**, **α** e **g** (aceleração da gravidade);
b) Determinar a frequência natural de oscilação do sistema, e a perda de amplitude esperada por ciclo, quando o sistema é retirado da posição de equilíbrio e solto para oscilar em torno dela.
c) Sendo dados**: M=20 kg**, **R=100 mm**, e que a deformação inicial estática da mola até a posição de equilíbrio para **α=30°** é **Δ=100 mm**, foram realizados ensaios para duas inclinações de rampa bastante diferentes, a saber **α=10°** e **α=50°.** Em ambos ensaios, o veículo foi deslocado de sua posição de equilíbrio no sentido de esticar a mola e solto para vibrar, tendo sido obtidas as curvas de decaimento da oscilação apresentadas nas figuras abaixo. Nestas condições, pede-se calcular o valor de **J** e da força de atrito seco equivalente para o movimento ao longo da rampa para as duas inclinações dadas.
d) Calcular o coeficiente de resistência ao rolamento dos pneus de borracha sobre a rampa e o momento de atrito seco nos mancais de deslizamento instalados no chassi e que suportam os eixos.
e) Para **α=50°,** e sabendo-se que o coeficiente de atrito de escorregamento entre os pneus e a rampa é 0,5, estimar a máxima amplitude de oscilação que faria com que as rodas “patinassem”.

PME 3400 **Exercício 3** **30/06/20**

Prof. Francisco E. B. Nigro



Solução do Exercício em Sala Nº3 30/6/2020

Itens a) e b) já resolvidos na P_1

c) $M_{eq}\,\ddot{x}(t) + F_{atrito}\cdot\frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} + k\,x(t) = 0$ com $M_{eq} = M + \frac{2J}{R^2}$

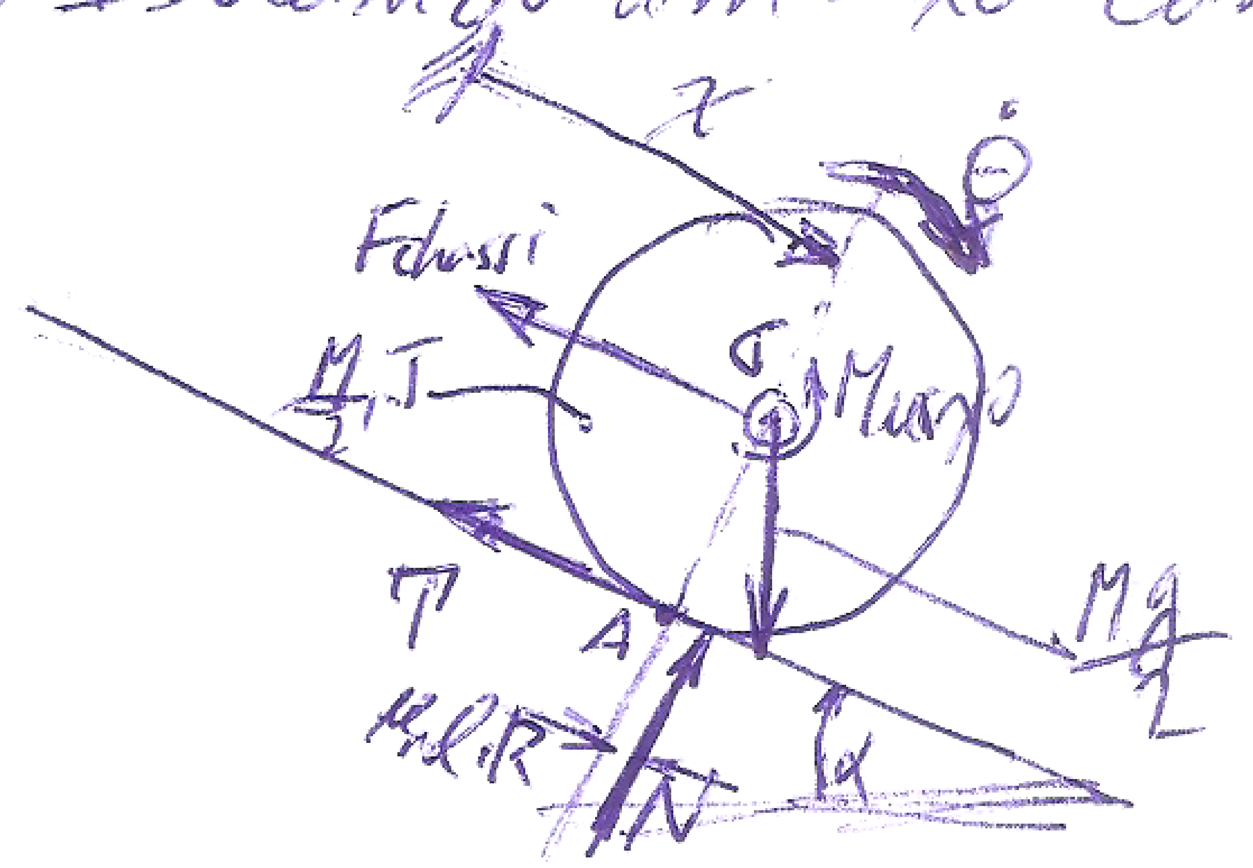
ou para um eixo de massa $M/2$ e com $\theta = \frac{x}{R}$

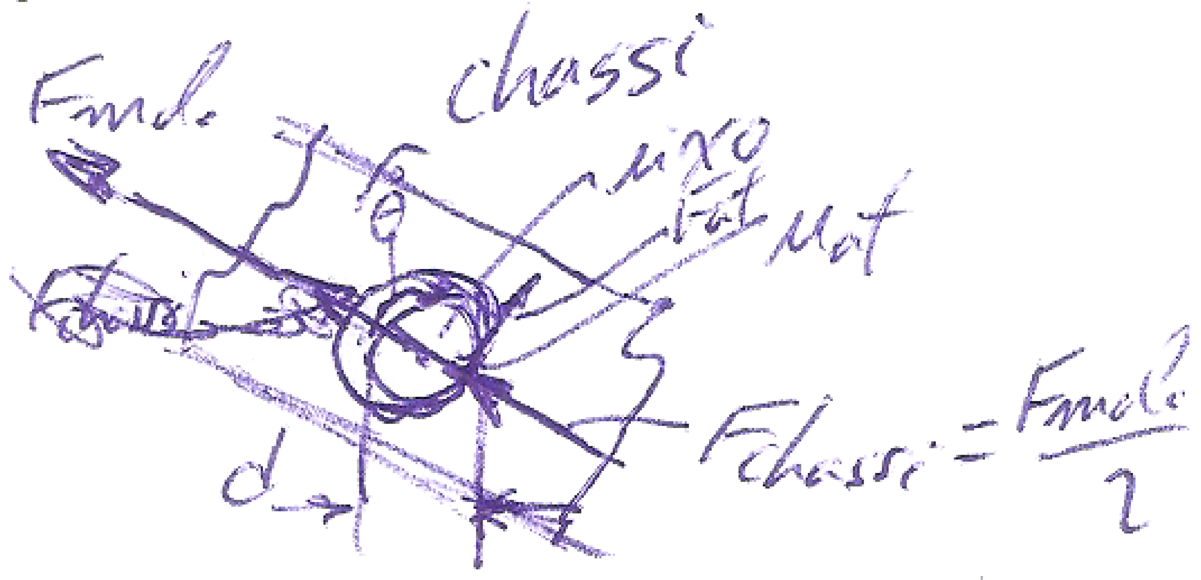
$$\left(J + \frac{MR^2}{2}\right)\ddot{\theta}(t) + \frac{F_{atrito}}{2}\cdot R\,\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + \frac{k}{2}R^2\theta(t) = 0$$

b) $\omega = \sqrt{\frac{kR^2}{2J + MR^2}}$ e $\Delta_{1/2} = \frac{2F_{atrito}}{k}$ ou $\Delta_{ciclo} = \frac{4F_{atrito}}{k}$

$k = 0{,}981\,N/mm$; $\omega = 3{,}14\,rad/s \Rightarrow J = 0{,}397\,kg\cdot m^2$

c/d) Isolando um eixo completo





$M_{eixo} = \mu_{at}\cdot F_{chassi}\frac{d}{2}$

$F_{chassi} = \frac{k}{2}(x_{in} + x)$

$k x_{in} = Mg\,\text{sen}\,\alpha$

$$TMB \Rightarrow \begin{cases} N = \frac{Mg}{2}\cdot\cos\alpha \\ \frac{M}{2}\cdot\ddot{x} = -F_{chassi} - T + \frac{Mg}{2}\cdot\text{sen}\,\alpha \end{cases}$$

$$TMA|_G \Rightarrow J\cdot\ddot{\theta} = T\cdot R - \mu_{rol}\cdot N\cdot R - \mu_{at}\frac{d}{2}\cdot\frac{k}{2}(x_{in} + x) \quad p/\ \dot{\theta} > 0$$

ou

$$\frac{J}{R}\cdot\ddot{x} = \left(\frac{Mg}{2}\text{sen}\,\alpha - \frac{k}{2}(x_{in}+x) - \frac{M}{2}\ddot{x}\right)\cdot R - \left(\mu_{rol}\,R\cdot\frac{Mg}{2}\cos\alpha + \mu_{at}\frac{d}{2}\frac{k}{2}(x_{in}+x)\right)$$

$$\left(\frac{J}{R^2} + \frac{M}{2}\right)\cdot\ddot{x} + \underbrace{\left[\mu_{rol}\cdot\frac{Mg}{2}\cos\alpha + \mu_{at}\frac{d}{2R}\left(\frac{Mg}{2}\text{sen}\,\alpha + \frac{k}{2}x\right)\right]}_{\frac{F_{atrito}}{2}}\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + \frac{k}{2}x = 0$$

p/ valer para $\dot{\theta} > 0$ ou < 0

Observar que a força no mancal eixo-chassi varia harmonicamente em torno de $\frac{Mg}{2}\text{sen}\,\alpha$, mas que o trabalho médio realizado pelo atrito fica equivalente ao da força $\frac{Mg}{2}\text{sen}\,\alpha$. Portanto, para efeitos práticos, ignoramos o termo $\mu_{at}\frac{d}{2R}\cdot\frac{k}{2}x$ na equação

Para o veículo completo

$$\left(M+\frac{2J}{R^2}\right)\cdot\ddot{x}(t)+\Big[\underbrace{\mu_{rol}\cdot Mg\cos\alpha+\mu_{at}\frac{d}{2R}\cdot Mg\,sen\,\alpha}_{Fatq}\Big]\cdot\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}+kx(t)=0$$

Para $\alpha=10^\circ \rightarrow 10(\tfrac{1}{2}\text{ciclos}) \rightarrow \Delta X = 26\,mm \therefore \Delta_{1/2} = 2{,}6\,mm = \frac{2Fatq(10^\circ)}{k}$

mas $k=\frac{Mg\cdot sen\,30^\circ}{100\,mm}=0{,}981\,N/mm \therefore Fatq(10^\circ)=1{,}275N$

Para $\alpha=50^\circ \rightarrow 20(\tfrac{1}{2}\text{ciclos}) \rightarrow \Delta X = 40\,mm \therefore \Delta_{1/2} = 2\,mm = \frac{2Fatq(50^\circ)}{k}$

$Fatq(50^\circ) = 0{,}981N$; $M=20\,kg$

As duas equações ficam portanto:

$\alpha=10^\circ$: $193{,}2\,\mu_{rol}+34{,}07\cdot\mu_{at}\frac{d}{2R}=1{,}275N$

$\alpha=50^\circ$: $126{,}1\cdot\mu_{rol}+150{,}3\,\mu_{at}\frac{d}{2R}=0{,}981N$

$193{,}2\cdot\mu_{rol}+230{,}28\,\mu_{at}\frac{d}{2R}=1{,}503N$

$\boxed{\mu_{at}\frac{d}{2R}=0{,}0012}$ $\boxed{\mu_{rol}=0{,}0064}$

e) Lembrando a solução da Equ. dif. no 1º movimento

$x(t)=\left(x_0-\frac{Fatq}{k}\right)\cdot\cos(\omega t)+\frac{Fatq}{k}$, $\ddot{x}(t)=-\left(x_0-\frac{Fatq}{k}\right)\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega t)$

Portanto o valor máximo de aceleração ocorre no instante $t=0$, e a força $T \not< \mu_{e}N$ para não "patinar"

$$\therefore |T|=\left|\frac{J}{R}\cdot\underset{\frac{\ddot{x}}{R}}{\ddot{\theta}}\,(<0)\;\underbrace{\left[\mu_{rol}\cdot\frac{Mg}{2}\cos\alpha+\mu_{at}\frac{d}{2R}\cdot\frac{k}{2}(x_{im}+x_0)\right]}_{Fatq/2}\right|<\mu_{esc}\frac{Mg}{2}\cos\alpha$$

$$\left|-\frac{J}{R^2}\cdot\omega^2\left(x_0-\frac{Fatq}{k}\right)-\frac{Fatq}{2}\right|<\mu_{esc}\cdot\frac{Mg}{2}\cos\alpha$$

$$\frac{0{,}397}{0{,}01}\cdot3{,}14^2\cdot(x_0-0{,}001)+\frac{0{,}981}{2}<0{,}5\cdot10\cdot9{,}81\cdot0{,}643$$

$$\boxed{x_0<82\,mm}$$