MAE224 - Probabilidade II
RESOLUCÃO PROVINHA 4
Prof. Vanderlei C. Bueno

1. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatrías independentes e identicamente distribuidas a X que tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda}\exp[-\frac{|x|}{\lambda}], \quad -\infty < x < \infty.$$

(a) Verifique se esta densidade é da classe exponencial quando $x \to \infty$.

(b Construir um intervalo de confiança para λ com coeficiente de confiança de 90%.

Solução:

(Aula 14)
F é do tipo exponencial em um ponto $\xi_{1;n}$ com $F(\xi_{1;n}) = 1 - \frac{1}{n}$ se F é continuamente diferenci' avel e

$$\frac{-f(x)}{\overline{F}(x)} \approx \frac{f^{'}(x)}{f(x)} \approx \frac{f^{''}(x)}{f^{'}(x)} \approx ....$$

quando $x \to \infty$.

Se $x \leq 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\lambda}e^{\frac{y}{\lambda}}dy = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{\lambda}}.$$

se $x > 0$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \frac{1}{2\lambda}e^{\frac{-y}{\lambda}}dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^{\frac{-x}{\lambda}}) = 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{\lambda}}.$$

Nas vizinhanÃ§as de ∞

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda}e^{\frac{-x}{\lambda}};$$

$$\frac{-f(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{-1}{2\lambda}e^{\frac{-x}{\lambda}}2.e^{\frac{x}{\lambda}} = \frac{-1}{\lambda}.$$

$$f^{'}(x) = \frac{-1}{2\lambda^2}e^{\frac{-x}{\lambda}};$$

$$\frac{f^{'}(x)}{f(x)} = \frac{-1}{2\lambda^2}e^{\frac{-x}{\lambda}}.2.\lambda e^{\frac{x}{\lambda}} = \frac{-1}{\lambda}.$$

$$f^{''}(x) = \frac{1}{2\lambda^3}e^{\frac{-x}{\lambda}};$$

$$\frac{f^{''}(x)}{f^{'}(x)} = \frac{1}{2\lambda^3}e^{\frac{-x}{\lambda}}. - 2.\lambda^2 e^{\frac{x}{\lambda}} = \frac{-1}{\lambda}.$$

E concluimos que F é da familia exponencial

b) Sabemos que

$$P(\frac{X_{(n;n)} - b_n}{a_n} \leq t) \rightarrow^D e^{-e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

onde $F(\xi_{(n;1)}) = 1 - \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{n.f(\xi_{(n;1)})}$ e $b_n = \xi_{(n;1)}$.

A equação

$\mathrm{F}(\xi_{(n;1)}) = 1 - \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{\frac{-\xi_{(n;1)}}{\lambda}} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow e^{\frac{-\xi_{(n;1)}}{\lambda}} = \frac{2}{n} \Leftrightarrow \frac{-\xi_{(n;1)}}{\lambda} = \ln\frac{2}{n} \Leftrightarrow \xi_{(n;1)} = -\lambda.\ln\frac{2}{n}$

Nas vizinhanças de ∞, $f(x) = \frac{1}{2\lambda}e^{\frac{-x}{\lambda}}$ e

$$f(\xi_{(n;1)}) = \frac{1}{2\lambda}e^{\lambda.\ln\frac{2}{n}} = \frac{1}{n.\lambda}.$$

e $a_n = \frac{1}{n.f(\xi_{(n;1)})} = \lambda$.

Por outro lado, o limite superior do intervalo de confianç e tal que

$$e^{-e^{-x}} = 0,95 \Leftrightarrow -e^{-x} = \ln(0,95) = -0,05 \Leftrightarrow e^{-x} = 0,05 \Leftrightarrow -x = \ln 0,05 \Leftrightarrow x_s = 3.$$

O limite superior do intervalo de confianç e tal que

$$e^{-e^{-x}} = 0,05 \Leftrightarrow -e^{-x} = \ln(0,05) = -3 \Leftrightarrow e^{-x} = 3 \Leftrightarrow -x = \ln 3 \Leftrightarrow x_i = 1,09.$$

Concluindo

$$P(1,09 \leq \frac{X_{(n;n)} - \lambda.\ln\frac{n}{2}}{\lambda} \leq 3) = 0,9 \Leftrightarrow$$

$$P(\frac{X_{(n;n)}}{3 + \ln\frac{n}{2}} \leq \lambda \leq \frac{X_{(n;n)}}{3 + \ln\frac{n}{2}}) = 0,9.$$

e o intervalo é

$$(\frac{X_{(n;n)}}{3 + \ln\frac{n}{2}}; \frac{X_{(n;n)}}{3 + \ln\frac{n}{2}}).$$