MAE224 - Probabilidade II
RESOLUCÃO PROVA 2
Prof. Vanderlei C. Bueno

1. Seja $X_1, X_2, ..., X_{25}$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição normal com média μ e variância 1.

   Em uma amostra

   $$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...25,$$

   teste, ao nível de 5% de significância, a hipótese

   $$H_0 : \mu = 12 \quad X \quad H_a : \mu > 12,$$

   através do nível descritivo, utilizando o $0,8$-ésimo quantil amostral $\widehat{\xi}_{0,8} = X_{(25;k)}$.

   Qual a sua decisão?

   Solução:

   Para calcular $\xi_{0,8}$ observamos que

   $$P(X \leq \xi_{0,8}) = 0,8 \Leftrightarrow P(Z \leq \xi_{0,8} - \mu) = 0,8 \Leftrightarrow \xi_{0,8} - \mu) = 0,84 \Leftrightarrow \xi_{0,8=\mu+0,84.}$$

   Conhecemos que

   $$\sqrt{n}(\frac{X_{(n;k)} - \xi_p}{\gamma}) \rightarrow^D N(0,1)$$

   onde $\gamma^2 = \frac{p.(1-p)}{f(\xi_p)^2}$.

   Contudo

   $$f(\xi_p) = f(\mu + 0,84) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\mu+0,84-\mu)^2} = 0,4.0,7 = 0,28,$$

   $\gamma^2 = 2,04$ e $\gamma = 1,43$.

   O valor da estatística observado é o de ordem $[np] + 1 = [25.0,8] + 1 = [20] + 1 = 21$, correspondendo à observação $\mathrm{x}_{(n;21)} = 21$ e o nível descritivo do teste é

   $$\alpha^* = P(X_{(n:21)} > 21|H_0) = P(Z > 5.(\frac{21 - 12 -, 4}{1,43})) = P(Z > 28,5) = 0.$$

   Decidimos rejeitar H_0 para qualquer nível de significância α.

2. Seja $(X_k)_{nk\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com função densidade de probabilidade

   $$f_{X_k}(x) = \frac{1}{2\sigma_k} \exp[\frac{-|x - \mu_k|}{\sigma_k}], \quad -\infty < x < \infty; \quad \sigma_k > 0; \quad -\infty < \mu_k < \infty.$$

   Sabe-se que

   $$E[|X_k - \mu_k|^{2j}] = (2j)!\sigma_k^{2j}.$$

   Prove a condiÃ§Ã£o de Liapunov quando $\sigma_k = k^3$

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{10}} \Sigma_{k=1}^n E[|X_k - \mu_k|]^{10} = 0.$$

   Observação:

   Para $\lambda > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\lambda+1}} \Sigma_{k=1}^{n} k^{\lambda} = \frac{1}{\lambda+1}$$

Solução:

Observe que

$$E[|X_k - \mu_k|^{10}] = E[|X_k - \mu_k|^{2.5}] = (10)!\sigma_k^{10} = (10)!(k^3)^{10} = (10)!k^{30}.$$

Portanto

$$\Sigma_{k=1}^{n} E[|X_k - \mu_k|^{10}] = \Sigma_{k=1}^{n} (10)!k^{30}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{31}} . \Sigma_{k=1}^{n} E[|X_k - \mu_k|^{10}] = \frac{(10)!}{31}.$$

por outro lado $s_n^2 = \Sigma_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = \Sigma_{k=1}^{n} (k^3)^2 = \sum_{k=1}^{n} 2k^6$.

e quando $n \to \infty$

$$\frac{s_n^2}{n^7} \to \frac{2}{7} \approx \frac{s_n}{n^{\frac{7}{2}}} \to (\frac{2}{7})^{\frac{1}{2}} \approx \frac{s_n^{10}}{n^{35}} \to (\frac{2}{7})^5.$$

Concluindo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{10}} \Sigma_{k=1}^{n} E[|X_k - \mu_k|]^{10} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{35}}{s_n^{10}} \frac{\Sigma_{k=1}^{n} E[|X_k - \mu_k|]^{10}}{n^{31}} \frac{n^{31}}{n^{35}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{2}{7})^5 . \frac{(10)!}{31} . \frac{1}{n^4} = 0.$$

3. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X que tem função de distribuição triangular em $(0, \theta)$

$$F(x) = \frac{2x^2}{\theta^2} \quad se \quad 0 \leq x < \frac{\theta}{2};$$

$$F(x) = \frac{4x}{\theta} - \frac{2x^2}{\theta^2} - 1 \quad se \quad \frac{\theta}{2} \leq x < \theta.$$

(a) Prove que a distribuição tem contato terminal de ordem m em $\xi_{0.n}$. Quais os valores de m e $\xi_{0.n}$?

Solução: Nas vizinhanças de $-\infty$, $x < 0$ e $\xi_{0.n} = 0$.

$$F(0) = 0; \quad F^{'}(x) = \frac{4.x}{\theta^2}; \quad F^{'}(0) = 0; \quad F^{''}(x) = \frac{4}{\theta^2} \neq 0.$$

Concluímos que $m = 1$.

(b) Considere um sistema em série com 100 componentes com tempos de duração independentes e identicamente distribuídos a X. Estime a probabilidade de sistema sobreviver a 150 horas, considerando $\theta = 2000$ horas?

Solução:

Da aula 14

$$\frac{X_{(n;0)} - \xi_{0.n}}{a_n} \leq t) \to^{D} 1 - e^{-(t)^{m+1}},$$

onde

$$a_n = [\frac{(-1)^{m+1}(m+1)!}{nF^{''}(\xi_{0.n})}]^{\frac{1}{m+1}}.$$

No problema $a_n = \frac{\theta}{\sqrt{2n}}$.. Como $n = 100$ e $\theta = 2000$,

$$P(X_{(n:0)} > 150) = P(\frac{X_{(n:0)}}{\frac{\theta}{\sqrt{2n}}} > \frac{150.\sqrt{200}}{2000}) = P(T > 1,06) = e^{-(1,06)^2} = 0,32.$$