Prova 2 de Mecânica

Escolha APENAS 4 questões

1. Considere uma Hamiltoniana de classe $\mathcal{C}^2$,

$$H : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R},\ H(q,p) = \frac{1}{2}\langle B(q)p; p\rangle + U(q)$$

onde para todo $q \in \mathbf{R}^n$, $B(q)$ é uma forma quadrática definida positiva. Mostre que (q_0, p_0) é um ponto de equilíbrio das equações de Hamilton se, e só se, $p_0 = 0$ e $\nabla U(q_0) = 0$. Mostre também que, lembrando-se que a própria H é uma integral primeira do sistema, que se q_0 é o único ponto de mínimo global de H, então o equilíbrio $(q_0, 0)$ é estável segundo Liapunov.

2. Seja $W : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de clase $\mathcal{C}^{+\infty}$. Considere um ponto material de massa 1 movendo-se sob ação da força conservativa constante $F(x,y,z) = (0,0,-1)$ e vinculado ao conjunto

$$V = \{(x,y,z) \mid z = W(x,y)\},$$

isto é, o ponto está vinculado ao gráfico da função W. Encontre coordenadas generalizadas para o vínculo e escreva a Lagrangiana e as equações de Euler-Lagrange para o movimento. Compare com a Lagrangiana $\overline{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1\dot{q}_2) = \frac{1}{2}\left((\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_1)^2\right) - W(q_1, q_2)$.

3. Considere o sistema

$$\dot{q} = F_1(q,p),\ \dot{p} = F_2(q,p)$$

com q, p em $\mathbf{R}$. Assuma que o vetor $(F_1(q,p), F_2(q,p))$ é perpendicular a (q,p), para todo $(q,p) \in \mathbf{R}^2$, e que as funções F_1, F_2 são de classe $\mathcal{C}^2$. Mostre que existe uma Hamiltoniana tal que a E.D.O dada é igual às equações de Hamilton se, e só se, a função $G(q,p) = F_1(q,p)^2 + F_2(q,p)^2$ depende apenas da norma de (q,p). Dica: O professor é preguiçoso. Ele gosta de reaproveitar ideias.

4. Considere um ponto material de massa 1 vinculado à superfície de revolução $x^2 + y^2 = e^{-z^2}$ no $\mathbf{R}^3$ e sob ação de nenhuma força. Mostre que, se $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma solução das equações do movimento, então ou $z(t)$ é periódica, ou $z(t)$ é estritamente monótona, e $\lim_{t\to\infty} |z(t)| = \infty$.

5. Seja $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2+p_2^2}{2} + U(q_1, q_2)$, onde U é de classe $\mathcal{C}^2$ e satisfaz que $U(q_1, q_2) = 1$ se $q_1^2 + q_2^2 = 1$, e $U(q_1, q_2) \leq q_1^2 + q_2^2$ para todo $(q_1, q_2) \in \mathbf{R}^2$. Se $\Phi_H : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^4$ é o fluxo Hamiltoniano definido por esta Hamiltoniana, mostre que:

   - Se $\|\Phi_H(X_0, 0)\| \leq \frac{1}{2}$, então $\|\Phi_H(X_0, t)\| < 2$ para todo t em $\mathbf{R}$.
   - Existe $\overline{X}$ com $\|\overline{X}\| \leq \frac{1}{2}$ e um inteiro $N \leq 2^8$ tal que $\|\Phi_H(\overline{X}, N)\| \leq \frac{1}{2}$