Terceira avaliação do curso
Física moderna I – IF diurno 2º sem. 2020.

Professor Tiago Fiorini

9 de dezembro de 2020

Questão 1 (1,5 pontos) – Dadas as energias dos estados do oscilador harmônico quântico como $E=(n+1/2)\hbar\omega$, calcule:

(a) o valor de $\Delta E_n/E_n$ **(0,5 ponto)**.

(b) faça $n \to \infty$ na expressão do item (a) e ache o limite para n grande **(0,5 ponto)**.

(c) o que o limite encontrado no item (b) significa? **(0,5 ponto)**

Resposta:

a) $\dfrac{\Delta E_n}{E_n}=\dfrac{[(n+1/2)-(n-1+1/2)]\hbar\omega}{(n+1/2)\hbar\omega}=\dfrac{1}{(n+1/2)}=\dfrac{2}{2n+1}$

b) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\Delta E_n}{E_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{2n+1}=0$

c) Significa que para números quânticos altos a diferença entre os níveis tende a diminuir, como uma aproximação clássica seguindo o princípio da correspondência.

Questão 2 (1,0 pontos) – Considere a função de onda no primeiro estado excitado do oscilador harmônico (n = 1) $\psi_1=Axe^{-ax^2/2}$ com $a=m\omega/\hbar$. Substitua a função ψ_1 diretamente na equação de Schrödinger independente do tempo e encontre a energia do primeiro estado excitado **(1,0 ponto)**.

Resposta: *Temos* $\dfrac{d\psi_1}{dx}=A(1-ax^2)e^{-ax^2/2}$ *e* $\dfrac{d^2\psi_1}{dx^2}=A(-3ax+a^2x^3)e^{-ax^2/2}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+V(x)\psi_1=E_1\psi_1$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}A(-3ax+a^2x^3)e^{-ax^2/2}+V(x)Axe^{-ax^2/2}=E_1Axe^{-ax^2/2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-3ax+a^2x^3)+V(x)x=E_1x\Rightarrow-\frac{\hbar^2}{2m}(-3a+a^2x^2)+V(x)=E_1$$

$$\frac{3a\hbar^2}{2m}-\frac{a^2\hbar^2}{2m}x^2+V(x)=E_1$$

$$\frac{3\hbar\omega}{2}-\frac{m\omega^2}{2}x^2+V(x)=E_1 \quad\Rightarrow\quad E_1=\frac{3}{2}\hbar\omega$$

Questão 3 (1,5 pontos) – Considere um elétron que esteja preso no potencial de um átomo de hidrogênio, que se encontre no estado 6f.

(a) calcule a energia do elétron **(0,5 ponto)**.

(b) calcule o módulo de L e todos os valores possíveis de L_z em unidades de $\hbar$ **(0,5 ponto)**.

(c) desenhe um diagrama vetorial que mostre as possíveis orientações do vetor momento angular **(0,5 ponto)**.

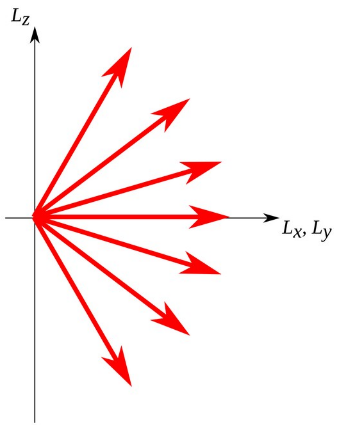
Resposta: *Temos* $n=6$ *e* $l=3$

a) $E_6=-\frac{13{,}6}{6^2}=0{,}38\ \text{eV}$

b) $L=\sqrt{3(3+1)}\,\hbar=2\sqrt{3}\,\hbar\approx3{,}46\,\hbar$

Como l=3, os valores possíveis de Lz são: -3ħ, -2ħ, -1ħ, 0, 1ħ, 2ħ, 3ħ

c)



Questão 4 (1,5 pontos) – (a) Qual a probabilidade de um elétron no estado 1s de um átomo de hidrogênio ser encontrado a uma distância maior que o raio de Bohr? *Dica:* use a integral $\int x^2 e^{bx}\,dx=\frac{e^{bx}}{b^3}\left[(bx)^2-2(bx)+2\right]$ **(1,0 ponto)**.

(b) E qual a probabilidade dele ser encontrado em regiões internas ao núcleo, que tem raio de 10^{-15} m? *Dica:* para este item, considere $e^{-2r/a_0}\approx1$ em todo o intervalo de integração, uma vez que $r\ll a_0$ **(0,5 ponto)**.

Resposta: *Parte radial da função de onda no estado 1s:* $R_1(r)=\frac{2}{a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$

a)
$$P=\int_{a_0}^{\infty}\left(\frac{4e^{-2r/a_0}}{a_0^3}\right)r^2dr=\frac{4}{a_0^3}\cdot\lim_{r\to\infty}\left\{\frac{e^{-2r/a_0}}{-8/a_0^3}[\dots]\right\}+\frac{4}{a_0^3}\frac{e^{-2}}{8/a_0^3}\left[\left(\frac{2a_0}{a_0}\right)^2+2\left(\frac{2a_0}{a_0}\right)+2\right]$$
$$=\frac{4}{a_0^3}\frac{e^{-2}}{8/a_0^3}10=5e^{-2}\approx0{,}68$$

b) $P=\int_0^{10^{-15}}\left(\frac{4}{3a_0^3}\right)r^2dr=\left[\frac{4r^3}{3a_0^3}\right]_0^{10^{-15}}=\frac{4\cdot 10^{-45}}{3(5{,}29\cdot 10^{-11})^3}\approx 9\cdot 10^{-15}$

Questão 5 (2,5 pontos) – Um elétron de massa μ se move apenas no plano XY e submetido à um potencial do tipo $V(r)=-K/r$.

(a) Use a equação de Schrödinger independente do tempo em coordenadas esféricas e imponha a condição $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0$, para encontrar as equações diferenciais desacopladas para as componentes radial e angular de uma função de onda do tipo $\psi(r,\phi)=R(r)\cdot g(\phi)$ **(1,0 ponto)**.

(b) Que tipo de solução se obtém para $g(\phi)$? *Dica:* consulte a demonstração para o átomo de hidrogênio feita em aula! **(0,5 ponto)**.

(c) Use a equação diferencial para a parte radial e imponha a condição $\frac{\partial\psi}{\partial r}=0$ para demonstrar que a energia cinética do elétron nessas condições é quantizada. **(0,5 ponto)**.

(d) Como esse resultado se compara com o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio? E o que isso significa? **(0,5 ponto)**.

Resposta: *a) A equação de Schrödinger em coordenadas esféricas é dada por:*

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right]+V(r)\psi=E\psi$$

Para um elétron no plano XY temos $\theta=\pi/2$ *, logo* $\operatorname{sen}\theta=1$ *, e aplicando a condição* $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0$ *temos:* $-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+V(r)\psi=E\psi$ *. Com alguma manipulação chegamos a* $-\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}[V(r)-E]\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$.

Substituindo $\psi(r,\phi)=R(r)\cdot g(\phi)$ *e dividindo ambos os lados da equação obtemos a equação:* $-\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}[V(r)-E]=\frac{1}{g(\phi)}\frac{d^2g(\phi)}{d\phi^2}$ *, que pode ser desacoplada em:*

$$\begin{cases}-\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}[V(r)-E]=-m^2\\ \frac{1}{g(\phi)}\frac{d^2g(\phi)}{d\phi^2}=-m^2\end{cases}$$

, sendo m um número inteiro.

b) Da equação $\frac{1}{g(\phi)}\frac{d^2g(\phi)}{d\phi^2}=-m^2$ *podemos tirar a solução* $g(\phi)=e^{-im\phi}$

c) Da equação $-\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}[V(r)-E]=-m^2$ *, ao se impor a condição* $\frac{\partial\psi}{\partial r}=0$ *chegamos a* $\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}[V(r)-E]=-m^2$ *. Lembrando a energia cinética K pode ser dada por* $K=E-V(r)$ *, temos* $\frac{2\mu r^2}{\hbar^2}K=m^2 \rightarrow K=\frac{\hbar^2 m^2}{2\mu r^2}$ *, mostrando que a energia cinética é quantizada por depender do número inteiro m.*

d) As condições de um elétron no plano XY, de $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0$ *junto com* $\frac{\partial\psi}{\partial r}=0$ *são exatamente as condições de uma órbita no plano e com raio constante, que é a condição do modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio. De fato, ao substituir a expressão da energia cinética e usando a relação de de Broglie temos:*

$K=\frac{p^2}{2\mu}=\frac{\hbar^2 m^2}{2\mu r^2} \rightarrow p=\frac{\hbar m}{r} \rightarrow \frac{h}{\lambda}=\frac{hm}{2\pi r} \rightarrow 2\pi r=m\lambda$ *, que implica em órbitas com múltiplos inteiros de comprimentos de onda. Assim como o modelo de Bohr.*

Isso significa que a equação de Schrödinger contem o modelo de Bohr, sendo ainda mais geral que ele.

Questão 6 – Verdadeiro ou falso? Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, e justifique a sua resposta com sentenças curtas. **(0,5 ponto cada item)**

V | F	**A radiação de corpo negro é gerada por osciladores harmônicos**
Justificativa	*Verdadeiro! Ao se resolver a equação de Schrödinger, se observa que a diferença entre os estados quânticos são múltiplos de hν. Justamente a suposição de Planck para a radiação do corpo negro, dando evidências de que ela é de fato produzida por osciladores harmônicos.*
V | F	**Elétrons podem ocupar o estado 2d em um átomo de hidrogênio**
Justificativa	*Falso! d implica estado de momento angular l=2, mas o valor máximo é dado por n-1=2-1=1. Logo, o estado de maior momento angular na camada 2 seria 2p.*
V | F	**Estados degenerados são aqueles com os mesmos números quânticos mas com energias diferentes**
Justificativa	*Falso! Estados degenerados são estados representados por diferentes números quânticos, mas com a mesma energia total.*
V | F	**O modelo do átomo de hidrogênio na teoria de Schrödinger prevê um quantização do momento angular idêntica à do modelo de Bohr**

Justificativa	*Falso! O modelo de Schrödinger, por ser tridimensional, prevê uma quantização mais complexa, que inclui o princípio da incerteza de Heisenberg.*