Gabarito da 3ª Lista de Exercícios - MAE1512

Professora: Silvia Nagib Elian **Monitores:** Danielle Velloso e Rodrigo Passos Martins

Exercício 1

Certo tipo de semente cresce, em média, até a altura de 8,5 cm, com desvio padrão de 1 cm. Semeiam-se 100 delas em um solo enriquecido, a fim de testar se há aumento na altura média nessas condições. Admitindo que a altura atingida com solo enriquecido tem distribuição normal com o mesmo desvio padrão:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{1^2}{100}\right) = N(\mu; 0,01)$$

a)

As hipóteses estatísticas adequadas para esse problema são descritas por:

$$\begin{cases} H_0 : \text{A média não aumenta: } \mu = 8,5 \\ H_a : \text{A média aumenta: } \mu > 8,5 \end{cases}$$

A região crítica do teste, para o nível de significância de 0,05, é dada por:

$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{verdadeira}) = P(\bar{X} > x_c | \mu = 8,5) = P\left(\frac{\bar{X} - 8,5}{\sqrt{0,01}} > \frac{x_c - 8,5}{\sqrt{0,01}}\right) = P(Z_{\bar{X}} > z_c)$$

Notemos que,

$$z_c = \frac{x_c - 8,5}{\sqrt{0,01}} \Leftrightarrow x_c = 8,5 + \frac{z_c}{10}$$

Tendo em vista que $z_c = 1,64$ para $\alpha = 0,05$, x_c é:

$$x_c = 8,5 + \frac{1,64}{10} = 8,5 + 0,164 = 8,664$$

Logo, a região crítica é dada por:

$$\text{RC} = \{x \in \mathbb{R} : x > 8,664\} \blacksquare$$

b)

Se a amostra de 100 sementes acusar uma média de 8,8 cm de altura, podemos rejeitar a hipótese nula, porque $8,8 \in$ RC da letra **a)**.

c)

Vamos estudar a chance de deixar de detectar um aumento na altura média, se a amostra de 100 sementes fosse proveniente de uma população cuja média é:

$$\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P(\text{Não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa})$$

i) 8,65 cm

$$P(\bar{X} \notin \text{RC}|\mu = 8,65) = P(\bar{X} \leq 8,664|\mu = 8,65) = P\left(\frac{\bar{X} - 8,65}{\sqrt{0,01}} \leq \frac{8,664 - 8,65}{\sqrt{0,01}}\right) =$$

$$= P(Z_{\bar{X}} \leq 0,14) = P(Z_{\bar{X}} \leq 0) + P(0 < Z_{\bar{X}} \leq 0,14) = 0,5 + 0,05567 = 0,55567 \;\square$$

ii) 8,80 cm

$$P(\bar{X} \notin \text{RC}|\mu = 8,80) = P(\bar{X} \leq 8,664|\mu = 8,80) = P\left(\frac{\bar{X} - 8,80}{\sqrt{0,01}} \leq \frac{8,664 - 8,80}{\sqrt{0,01}}\right) =$$

$$= P(Z_{\bar{X}} \leq -1,36) = P(Z_{\bar{X}} \geq 1,36) = 0,5 - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1,36) = 0,5 - 0,41309 = 0,08691 \;\square$$

iii) 9 cm

$$P(\bar{X} \notin \text{RC}|\mu = 9) = P(\bar{X} \leq 8,664|\mu = 9) = P\left(\frac{\bar{X} - 9}{\sqrt{0,01}} \leq \frac{8,664 - 9}{\sqrt{0,01}}\right) = P(Z_{\bar{X}} \leq -3,36) =$$

$$= P(Z_{\bar{X}} \geq 3,36) = 0,5 - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 3,36) = 0,5 - 0,49961 = 0,00039 \;\blacksquare$$

Exercício 2

Uma amostra aleatória de 36 copos de um certo suco mostrou um conteúdo médio líquido de 200ml, com desvio padrão de 26ml. Vamos admitir que o conteúdo nos copos de suco tem distribuição Normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{26^2}{36}\right)$$

Agora, vamos testar a hipótese de que o conteúdo médio dos copos desse tipo de suco é igual a 225ml contra a hipótese alternativa de que é inferior a 225ml, com o nível de significância $\alpha = 0,05$:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 225 \\ H_a : \mu < 225 \end{cases}$$

$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0|H_0\text{verdadeira}) = P(\bar{X} < x_c|\mu = 225) = P\left(\frac{\bar{X} - 225}{\sqrt{\frac{26^2}{36}}} < \frac{x_c - 225}{\sqrt{\frac{26^2}{36}}}\right) = P\left(Z_{\bar{X}} < \frac{x_c - 225}{4,33}\right)$$

Notemos que,

$$z_c = \frac{x_c - 225}{4,33} \Leftrightarrow x_c = 225 + 4,33.z_c$$

Tendo em vista que $z_c = -1,64$ para $\alpha = 0,05$, x_c é:

$$x_c = 225 - 1,64.4,33 \cong 225 - 7,1 = 217,9$$

Logo, a região crítica é dada por:

$$\text{RC} = \{x \in \mathbb{R} : x < 217,9\}$$

Como a média amostral foi de 200ml e percente à RC, então, rejeitamos H_0 ao nível de significância de 5%.

Exercício 3

O consumo médio de gasolina num certo tipo de automóvel é de 15 Km/litro, segundo informações da montadora. Uma revista especializada verificou o consumo em 25 desses veículos, escolhidos ao acaso, e constatou consumo médio de 14,3 Km/litro. Admita que o consumo siga o modelo Normal com variância igual 9 $(\text{Km/litro})^2$.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{9}{25}\right)$$

a)

Vamos testar, ao nível de significância de 6%, a afirmação da montadora de que a média de consumo é igual a 15Km/litro, contra a alternativa de ser igual a 14 Km/litro. Essa hipótese pode ser descrita como:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 15 \\ H_a : \mu = 14 \end{cases}$$

Como $\alpha = 0,06$, temos que $z_c = -1,56$. Logo, sob H_0:

$$x_c = \mu + z_c.\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 15 - 1,56.\sqrt{\frac{9}{25}} = 14,064$$

Portanto, RC $= \{x \in \mathbb{R} : x < 14,064\}$.

Assim, como a média observada foi de 14,3 e ela não pertence à RC, não rejeitamos H_0 a um nível de significância de 6%.

b)

Vamos determinar a probabilidade do erro tipo II:

$$\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P(\text{Não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = P(\bar{X} \notin \mathbb{R} | \mu = 14) = P\left(\frac{\bar{X} - 14}{\sqrt{\frac{9}{25}}} \geq \frac{14,064 - 14}{\sqrt{\frac{9}{25}}}\right) \cong$$

$$\cong P(Z_{\bar{X}} \geq 0,107) = 0,5 - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 0,107) \cong 0,5 - 0,0438 = 0,4562 \blacksquare$$

Exercício 4

A resistência de um certo tipo de cabo de aço é uma variável aleatória com distribuição normal com desvio padrão 6 Kgf:

$$X \sim N(\mu; 6^2)$$

Uma amostra de 25 desses cabos forneceu média igual a 9,8 Kgf ($\bar{X} = 9,8$).

Vamos testar a hipótese de que a resistência média é igual a 13 contra a alternativa de que é diferente de 13 com o nível de significância α de 0,02:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 13 \\ H_a : \mu \neq 13 \end{cases}$$

$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P(\text{Rejeitar } H_0|H_0\text{verdadeira}) = P(\bar{X} \in RC|\mu = 13) = P(\bar{X} < x_{c_1} \text{ ou } \bar{X} > x_{c_2}|\mu = 13) =$$

$$P(\bar{X} < x_{c_1}|\mu = 13)+P(\bar{X} > x_{c_2}|\mu = 13) = P\left(\frac{\bar{X}-13}{\sqrt{\frac{6^2}{25}}} < \frac{x_{c_1}-13}{\sqrt{\frac{6^2}{25}}}\right)+P\left(\frac{\bar{X}-13}{\sqrt{\frac{6^2}{25}}} > \frac{x_{c_2}-13}{\sqrt{\frac{6^2}{25}}}\right) = P(Z_{\bar{X}} < z_{c_1})+P(Z_{\bar{X}} > z_{c_2})$$

Por conta da simetria da distribuição Normal, podemos assumir que $z_{c_1} = -z_{c_2}$. Logo,

$$P(Z_{\bar{X}} < z_{c_1}) + P(Z_{\bar{X}} > z_{c_2}) = 2.P(Z_{\bar{X}} > z_{c_2}) = 0,02 \Leftrightarrow P(Z_{\bar{X}} > z_{c_2}) = 0,01$$

Assim, temos que $z_{c_2} = 2,33$ e $z_{c_1} = -z_{c_2} = -2,33$. Sendo assim, temos que,

$$x_{c_1} = 13 - 2,33.\frac{6}{5} = 10,204 \quad \text{e} \quad x_{c_2} = 13 + 2,33.\frac{6}{5} = 15,796$$

Então, a região crítica é dada por:

$$\text{RC} = \{x \in \mathbb{R} : x < 10,204 \text{ ou } x > 15,796\}$$

Logo, como a média observada de 9,8 Kgf pertence à RC, rejeitamos H_0 ao nível de significância de 0,02.

Exercício 5

Usualmente, o tempo médio para um operário executar uma tarefa é de 100 minutos. Introduziu-se uma modificação para diminuir essa média e após certo período, sorteou-se uma amostra de 16 operários, medindo-se o tempo de execução de cada um. O tempo médio observado na amostra foi de 85 minutos e o desvio padrão, 12 minutos.

Admitindo que a distribuição da variável tempo de execução da tarefa é Normal, ao nível de significância de 5%, vamos verificar se estes resultados trazem evidências da melhora desejada:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 100 \\ H_a : \mu < 100 \end{cases}$$

Como $\alpha = 0,05$, sob H_0, o erro do tipo I é dado por:

$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0|H_0\text{verdadeira}) = P(\bar{X} \leq x_c|\mu = 100) = P\left(\frac{\bar{X} - 100}{\frac{12}{\sqrt{16}}} \leq \frac{x_c - 100}{\frac{12}{\sqrt{16}}}\right) = P(t_{16-1} \leq t_c)$$

Assim, temos que,

$$t_c = \frac{x_c - 100}{\frac{12}{\sqrt{16}}} \Leftrightarrow x_c = 100 + \frac{12}{4}.t_c = 100 + 3.(-1,753) = 94,741$$

Portanto, RC $= \{x \in \mathbb{R} : x < 94,741\}$.

Assim, como a média observada foi de 85 e ela pertence à RC, rejeitamos H_0 a um nível de significância de 5%. Ou seja, os resultados indicam uma evidência de melhora no processo.

Agora, vamos construir um intervalo de confiança com coeficiente de confiança de 0,90 para o novo tempo médio de execução:

$$IC(\mu; \gamma = 90\%) = \bar{X} \pm t_{15,\gamma}.\frac{s}{\sqrt{n}} = \left[85 - 1,753.\frac{12}{\sqrt{16}}; 85 + 1,753.\frac{12}{\sqrt{16}}\right] = [79,741; 90,259] \ \blacksquare$$

Exercício 6

No teste de hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1150, \text{com } \sigma = 150 \\ H_a : \mu = 1200, \text{com } \sigma = 200 \end{cases}$$

para X com distribuição Normal, utilizou-se $n = 100$ e a RC $= \{\bar{X} \geq 1170\}$.

a)

A probabilidade de se rejeitar H_0 quando verdadeira é dada por:

$$\alpha = P(\text{Erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0|H_0\text{verdadeira}) = P(\bar{X} > x_c|\mu = 1150) = P\left(\frac{\bar{X} - 1150}{\frac{150}{\sqrt{100}}} > \frac{x_c - 1150}{\frac{150}{\sqrt{100}}}\right) = P(Z_{\bar{X}} > z_c)$$

Daqui, temos que, como o x_c dado é de 1170, então:

$$z_c = \frac{x_c - 1150}{\frac{150}{\sqrt{100}}} = \frac{1170 - 1150}{15} \cong 1,33$$

Da tabela, temos que:

$$\alpha = P(Z_{\bar{X}} > z_c) = P(Z_{\bar{X}} > 1,33) = 0,5 - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1,33) = 0,5 - 0,40824 = 0,09176 = 9,176\% \ \blacksquare$$

b)

A probabilidade de aceitarmos H_0 quando H_1 é verdadeira se dá por:

$$\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P(\text{Não rejeitar } H_0|H_0 \text{ falsa}) = P(\bar{X} \notin \text{RC}|\mu = 1200) = P(\bar{X} \leq 1170|\mu = 1200) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - 1200}{\frac{200}{\sqrt{100}}} \leq \frac{1170 - 1200}{\frac{200}{\sqrt{100}}}\right) = P(Z_{\bar{X}} \leq -1,5) = P(Z_{\bar{X}} \geq 1,5) = 0,5 - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1,5) = 0,5 - 0,43319 \cong 0,0668 \ \blacksquare$$

c)

A região crítica para que se tenha $\alpha = \beta$ deve ser:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow P\left(Z_{\bar{X}} > \frac{x_c - 1150}{\frac{150}{\sqrt{100}}}\right) = P\left(Z_{\bar{X}} < \frac{x_c - 1200}{\frac{200}{\sqrt{100}}}\right)$$

Pela simetria da normal, temos que $P(Z < -z) = P(Z > z)$, portanto:

$$P\left(Z_{\bar{X}} > \frac{x_c - 1150}{\frac{150}{\sqrt{100}}}\right) = P\left(Z_{\bar{X}} < \frac{x_c - 1200}{\frac{200}{\sqrt{100}}}\right) \Leftrightarrow -\left(\frac{x_c - 1150}{\frac{150}{\sqrt{100}}}\right) = \frac{x_c - 1200}{\frac{200}{\sqrt{100}}} \Leftrightarrow 4.(-x_c + 1150) = 3.(x_c - 1200) \Leftrightarrow$$

$$-4.x_c + 4600 = 3.x_c - 3600 \Leftrightarrow 7.x_c = 8200 \Leftrightarrow x_c \cong 1171,43$$

Logo, a região crítica deve ser tal que RC $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1171,43\}$ ■

Exercício 7

Um comprador vai adquirir um novo tipo de luva a prova d'água mas receia que elas não sejam tão boas quanto as anteriores que acusavam 1% de pares defeituosos. Assim, para cada remessa ele toma uma amostra de 100 pares e avalia a proporção de pares defeituosos a fim de realizar um teste a nível de significância de 9%.

a)

As hipóteses nula e alternativa são:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0,1 \\ H_a : p > 0,1 \end{cases}$$

b)

Vamos verificar para quais valores da proporção amostral a hipótese nula será rejeitada.

Primeiro, vamos considerar a aproximação Normal para esse caso, em que, sob H_0:

$$\hat{p} \sim N\left(0,1; \frac{0,1.0,9}{100} = \frac{0,09}{100}\right)$$

Seja também p a proporção desconhecida de luvas defeituosas.

Agora, considerando uma significância de 0,09, pela tabela $z_c = 1,34$. E como,

$$p_c = p + z_c.\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Temos que a região crítica nessas condições é:

$$p_c = 0,1 + 1,34.\sqrt{\frac{0,1.0,9}{100}} = 0,1402 \Rightarrow \text{RC} = \{0,1402 < \hat{p} \leq 1\} \blacksquare$$

c)

Devemos rejeitar todas as remessas que apresentaram um valor de proporção pertencente à RC. Como RC $= \{0,1402 < p \leq 1\}$, devemos rejeitar as remessas: 25%, 16%, 24%, e 21%.

Exercício 8

O nível de colesterol no sangue é uma variável aleatória com distribuição Normal com média μ desconhecida e desvio padrão 60mg/100ml:

$$X \sim N(\mu; (60mg/100ml)^2)$$

a)

Vamos testar, a um nível de significância de 5%, a hipótese de que a média é 260 contra a alternativa de que é maior que 260 com base em uma amostra de 50 pacientes em que se observou uma média amostral de 268:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 260 \\ H_a : \mu > 260 \end{cases}$$

Como $\alpha = 0,05$, temos que $z_c = 1,64$. Logo, sob H_0:

$$x_c = \mu + z_c.\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 260 + 1,64.\sqrt{\frac{60^2}{50}} \cong 273,92$$

Portanto, RC $= \{x \in \mathbb{R} : x > 273,92\}$.

Assim, como a média observada foi de 268 e ela não pertence à RC, não rejeitamos H_0 a um nível de significância de 5%.

b)

Agora, vamos calcular a probabilidade do erro do tipo II se o valor da média μ for igual a 290:

$$\beta = P(\text{Erro tipo II}) = P(\text{Não rejeitar } H_0|H_0 \text{ falsa}) = P(\bar{X} \notin \text{RC}|\mu = 290) = P(\bar{X} \leq 273,92|\mu = 290) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - 290}{\frac{60}{\sqrt{50}}} \leq \frac{273,92 - 290}{\frac{60}{\sqrt{50}}}\right) \cong P(Z_{\bar{X}} \leq -1,895) = P(Z_{\bar{X}} > -1,895) = 0,5 - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1,895) = 0,5 - 0,47062 \cong 0,029 \blacksquare$$

c)

Vamos calcular o tamanho da amostra para que o intervalo com 99% de confiança para μ tenha um comprimento de 30 unidades.

O intervalo de confiança para μ é dado por:

$$IC(\mu; \gamma = 0,99) = \bar{X} \pm Z_{\gamma/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Assim, o comprimento do intervalo se dá por:

$$2.Z_{\gamma/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Portanto, para termos um intervalo de confiança com 30 unidades de comprimento, precisamos de um tamanho amostra n tal que:

$$2.Z_{\gamma/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 30 \Leftrightarrow 2,58.\frac{60}{\sqrt{n}} = 15 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 2,58.\frac{60}{15} \Leftrightarrow n = (2,58.4)^2 \cong 107$$

Logo, precisamos de $n = 107$.

d)

Agora, com base nos dados do item **a)**, vamos construir um intervalo com 94% de confiança para μ:

$$IC(\mu;\gamma = 0,94) = \bar{X} \pm Z_{\gamma/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 268 \pm 1,88.\frac{60}{\sqrt{50}} = [252,05;283,95] \blacksquare$$

Exercício 9

Um estudante submetido a uma prova do tipo teste, com 64 questões de 5 alternativas cada, acertou 14 questões.

Vamos testar a hipótese de que o aluno está adivinhando as respostas (apenas "chutando" sem conhecimento).

a)

Como são 64 questões com 5 alternativas cada, espera-se que o aluno acerte pelo menos $\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$ das questões, ou seja,

$$\begin{cases} H_0 : p = 0,2 \text{ (O aluno teve a pontuação mínima esperada - chutando)} \\ H_a : p > 0,2 \text{ (O aluno está melhor do que o que se espera de quem chuta)} \end{cases}$$

Sabendo que ele acertou 14 questões de 64 ($n = 64$), podemos considerar que $\hat{p}_{obs} = \frac{14}{64} = 0,21875$.

b)

Agora, vamos construir a região de confiança para fazermos o teste. Como $\alpha = 0,05$, temos que $z_c = 1,64$. Logo, sob H_0:

$$p_c = p + z_c.\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,2 + 1,64.\sqrt{\frac{0,2.0,8}{64}} = 0,282$$

Portanto, RC $= \{0,282 < p \leq 1\}$.

Assim, como $\hat{p}_{obs} \notin$ RC, não rejeitamos H_0 a um nível de significância de 5%. Ou seja, os dados sugerem que o aluno está adivinhando as respostas da prova.

10) a) $H_0: p = 0,7$ vs $H_a: p < 0,7$ ($p \to$ proporção de alunos aprovados)

b) $RC = \{x \in \mathbb{R} \mid x < p_c\}$ $\alpha = 0,02$ $n = 25$

Suponha n grande para que, pelo T.C.L, $\hat{p}$ tenha distribuição normal.

$P(\hat{p} < p_c \mid H_0) = 0,02 \Rightarrow P(\hat{p} < p_c \mid p = 0,7) = 0,02 \Rightarrow P\left(Z < \frac{p_c - 0,7}{\sqrt{0,21}/5}\right) = 0,02$

$\Rightarrow P(Z < t) = 0,02 \Rightarrow t = -2,05 \Rightarrow \frac{p_c - 0,7}{\sqrt{0,21}/5} = -2,05 \Rightarrow p_c = 0,5121$

$RC = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0,5121\}$

c) Como $\hat{p}_{OBS} = \frac{15}{25} = 0,6$, $\hat{p} \notin RC$, não rejeitamos H_0 ao nível de significância de 2%. Isto é, a coordenadora do curso está correta.

Seção 8.6

4) Suponha que o desvio padrão continue o mesmo.

a) $H_0: \mu = 10$ vs. $H_a: \mu > 10$ ($\mu \to$ tempo médio de travessia da nova balsa)

b) Erro Tipo I: Considerar que o tempo médio de travessia aumentou, sendo que ele se manteve o mesmo.

Erro Tipo II: Decidir que o tempo médio de travessia se manteve igual, sendo que ele aumentou.

c) $n = 20$ $RC = \{x \in \mathbb{R} \mid x > x_c\}$ $\alpha = 0,05$

$P(\bar{X} > x_c \mid \mu = 10) = 0,05 \Rightarrow P\left(Z > \frac{x_c - 10}{3/\sqrt{20}}\right) = 0,05 \Rightarrow P(Z > t) = 0,05 \Rightarrow$

$t = 1,65 \Rightarrow \frac{x_c - 10}{3/\sqrt{20}} = 1,65 \Rightarrow x_c = 11,11$

$RC = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 11,11\}$

d) $\beta_{12} = P(\bar{X} \notin RC \mid \mu = 12) = P(\bar{X} < 11,11 \mid \mu = 12) = P\left(Z < \frac{11,11 - 12}{3/\sqrt{20}}\right)$

$= P(Z < -1,3267) = 0,5 - P(0 < Z < 1,33)$

$= 0,5 - 0,4082 = 0,0918$

$\mu \Rightarrow$ tempo médio de cura para doente tratado com o método B

6) a) $H_0: \mu = 7$ vs $H_a: \mu < 7$ $\quad RC = \{x \in \mathbb{R} \mid x < x_c\}$

$P(\bar{X} < x_c \mid \mu = 7) = 0,02 \Rightarrow P\left(Z < \frac{x_c - 7}{2/5}\right) = 0,02 \Rightarrow P(Z < t) = 0,02$

$\Rightarrow t = -2,05 \Rightarrow \frac{x_c - 7}{2/5} = -2,05 \Rightarrow x_c = 6,18$

$RC = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6,18\}$. Como $\bar{x} = 6 \in RC$, rejeitamos H_0 ao nível de significância de 0,02, ou seja, o tempo de cura diminuiu.

b) $\gamma = 95\% \Rightarrow z = 1,96$ $\quad IC(\mu, 95\%) = \left[\bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

$IC(\mu, 95\%) = \left[6 \pm 1,96 \cdot \frac{2}{5}\right] = [5,216 ; 6,784]$

7) a) $P(\bar{X} < 47 \text{ ou } \bar{X} > 53 \mid \mu = 50) = P(\bar{X} < 47 \mid \mu = 50) + P(\bar{X} > 53 \mid \mu = 50)$

$= P\left(Z < \frac{47 - 50}{3/2}\right) + P\left(Z > \frac{53 - 50}{3/2}\right) = 2P(Z > 2) = 2(0,5 - P(0 < Z < 2))$

$= 2(0,5 - 0,4772) = 0,0456$ (erro tipo I) ($H_0: \mu = 50$ vs $H_a: \mu \neq 50$)

b) $P(47 < \bar{X} < 53 \mid \mu = 52) = P\left(\frac{47 - 52}{3/2} < Z < \frac{53 - 52}{3/2}\right)$

$= P\left(-\frac{10}{3} < Z < \frac{2}{3}\right) = P(0 < Z < 3,33) + P(0 < Z < 0,67)$

$= 0,4996 + 0,2486 = 0,7482$

9) Suponha n grande para que, pela TCL, $\bar{X}$ tenha distribuição normal. $\mu \to$ tempo médio para alívio da dor

$H_0: \mu = 14$ vs $H_a: \mu > 14$ $\quad RC = \{x \in \mathbb{R} \mid x > x_c\}$

$P(\bar{X} > x_c \mid \mu = 14) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(Z > \frac{x_c - 14}{5/\sqrt{40}}\right) = 0{,}05 \Rightarrow P(Z > t) = 0{,}05$

$\Rightarrow t = 1{,}65 \Rightarrow \frac{x_c - 14}{5/\sqrt{40}} = 1{,}65 \Rightarrow x_c = 15{,}30$

$RC = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 15{,}30\}$. Como $\bar{x} = 19 \in RC$, rejeitamos H_0 ao nível de significância de 0,05, ou seja, a afirmação do laboratório é falsa.

12) a) $H_0: p = 0{,}5$ vs $H_a: p \neq 0{,}5$ (OBS: p é a proporção de bolas vermelhas)

$RC = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0{,}4375$ ou $x > 0{,}5625\}$ $\quad \frac{28}{64} = 0{,}4375$ e $\frac{36}{64} = 0{,}5625$

$\alpha = P(\hat{p} \in RC \mid p = 0{,}5) = P(\hat{p} < 0{,}4375$ ou $\hat{p} > 0{,}5625 \mid p = 0{,}5)$

$= P\left(Z < \frac{0{,}4375 - 0{,}5}{0{,}5/8}\right) + P\left(Z > \frac{0{,}5625 - 0{,}5}{0{,}5/8}\right) = P(Z < -1) + P(Z > 1)$

$= 2P(Z > 1) = 2(0{,}5 - P(0 < Z < 1)) = 2(0{,}5 - 0{,}3413) = 0{,}3174$

b) $\beta_{0,6} = P(\hat{p} \notin RC \mid p = 0{,}6) = P(0{,}4375 < \hat{p} < 0{,}5625 \mid p = 0{,}6)$

$= P\left(\frac{0{,}4375 - 0{,}6}{\sqrt{0{,}24}/8} < Z < \frac{0{,}5625 - 0{,}6}{\sqrt{0{,}24}/8}\right) = P(-2{,}65 < Z < -0{,}61)$

$= P(0 < Z < 2{,}65) - P(0 < Z < 0{,}61) = 0{,}4960 - 0{,}2291 = 0{,}2669$

c) $\pi(0{,}4) = P(\hat{p} \in RC \mid p = 0{,}4) = P(\hat{p} < 0{,}4375$ ou $\hat{p} > 0{,}5625 \mid p = 0{,}4)$

$= P\left(Z < \frac{0{,}4375 - 0{,}4}{\sqrt{0{,}24}/8}\right) + P\left(Z > \frac{0{,}5625 - 0{,}4}{\sqrt{0{,}24}/8}\right) = P(Z < 0{,}61) + P(Z > 2{,}65)$

$= 0{,}5 + P(0 < Z < 0{,}61) + 0{,}5 - P(0 < Z < 2{,}65)$

$= 1 + 0{,}2291 - 0{,}4960 = 0{,}7331$

13) Suponha n grande para que, pela TCL, $\hat{p}$ tenha distribuição normal. $p \rightarrow$ proporção de complicações em cirurgias

a) $H_0: p = 0,2$ vs $H_a: p < 0,2$ $RC = \{x \in \mathbb{R} \mid x < p_c\}$

$$P(\hat{p} < p_c \mid p = 0,2) = 0,05 \Rightarrow P\left(Z < \frac{p_c - 0,2}{\sqrt{0,16}/10}\right) = 0,05 \Rightarrow P(Z < t) = 0,05$$

$$\Rightarrow t = -1,65 \Rightarrow \frac{p_c - 0,2}{\sqrt{0,16}/10} = -1,65 \Rightarrow p_c = 0,134$$

b) $$P(\hat{p} \in RC \mid p = 0,08) = P(\hat{p} > 0,134 \mid p = 0,08) = P\left(Z > \frac{0,134 - 0,08}{\sqrt{0,08 \cdot 0,92}/10}\right)$$

$$= P(Z > 1,99) = 0,5 - P(0 < Z < 1,99) = 0,5 - 0,4767 = 0,0233$$

c) Observe que, não sabemos n nem o pc para essa amostra

$$\alpha = 0,05 = P(\hat{p} < p_c \mid p = 0,2) \Rightarrow P\left(Z < \frac{p_c - 0,2}{\sqrt{0,16}/\sqrt{n}}\right) = 0,05 \Rightarrow P(Z < t) = 0,05$$

$$\Rightarrow t = -1,65 \Rightarrow \frac{p_c - 0,2}{\sqrt{0,16}/\sqrt{n}} = -1,65 \Rightarrow p_c = 0,2 - \frac{0,66}{\sqrt{n}}$$

$$\beta_{0,1} = 0,05 = P(\hat{p} > p_c \mid p = 0,1) \Rightarrow P\left(\hat{p} > 0,2 - \frac{0,66}{\sqrt{n}} \mid p = 0,1\right) = 0,05 \Rightarrow$$

$$P\left(Z > \frac{0,2 - \frac{0,66}{\sqrt{n}} - 0,1}{\sqrt{0,09}/\sqrt{n}}\right) = 0,05 \Rightarrow P\left(Z > \frac{0,1\sqrt{n} - 0,66}{0,3}\right) = 0,05 \Rightarrow$$

$$P(Z > t) = 0,05 \Rightarrow t = 1,65 \Rightarrow \frac{0,1\sqrt{n} - 0,66}{0,3} = 1,65 \Rightarrow \sqrt{n} = 11,55$$

$$\Rightarrow n = 133,4025 \Rightarrow n \cong 134$$

Seção 9.2

6) $\alpha = 10\%$ $H_0: p_A - p_B = 0$ vs $H_a: p_A - p_B \neq 0$

Suponha que n é grande para que $\hat{p}_A - \hat{p}_B$ tenha distribuição normal.

$$\hat{p}_{A\,OBS} = \frac{32}{50} = 0,64 \qquad \hat{p}_{P\,OBS} = \frac{32 + 48}{150} = 0,53$$

$$\hat{p}_{B\,OBS} = \frac{48}{100} = 0,48 \qquad \hat{p}_P(1 - \hat{p}_P)(1/n_A + 1/n_B) = 0,53 \cdot 0,47 \cdot \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{100}\right) = 0,007473$$

Sabemos que $\frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{0,007473}} \sim N(0,1)$ e $RC = \{z \in \mathbb{R} \mid z < z_{c1} \text{ ou } z > z_{c2}\}$

$z = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{0,007473}}$

$P\left(\frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{0,007473}} < z_{c1} \mid H_0\right) = 0,05$ e $P\left(\frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{0,007473}} > z_{c2} \mid H_0\right) = 0,05$

$\Rightarrow z_{c1} = -1,65$ e $z_{c2} = 1,65 \Rightarrow RC = \{z \in \mathbb{R} \mid z < -1,65 \text{ ou } z > 1,65\}$

Como $z_{OBS} = \frac{0,64 - 0,48}{\sqrt{0,007473}} = 1,85$, $z_{OBS} \in RC$. Então rejeitamos H_0 ao nível de significância de 10%.

$\boxed{\text{Seção 9.6}}$

14) $H_0: p_A - p_B = 0$ vs $H_a: p_A - p_B < 0$

$\hat{p}_{A\,OBS} = \frac{6}{58} = 0,103$ $\hat{p}_{P\,OBS} = \frac{6+10}{58+85} = \frac{16}{143} = 0,112$

$\hat{p}_{B\,OBS} = \frac{10}{85} = 0,118$ $\hat{p}_P(1-\hat{p}_P)(1/n_A + 1/n_B) = 0,112 \cdot 0,888 \left(\frac{1}{58} + 1/85\right) = 0,0029$

Suponha n grande para que $\frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{0,0029}} \sim N(0,1)$

$RC = \{z \in \mathbb{R} \mid z < z_c\}$, $z = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{0,0029}}$

$P\left(\frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{0,0029}} < z_c \mid H_0\right) = 0,06 \Rightarrow P(Z < z_c) = 0,06 \Rightarrow z_c = -1,56$

Como $z_{OBS} = \frac{0,103 - 0,118}{\sqrt{0,0029}} = -0,278$, $z_{OBS} \notin RC$, então não rejeitamos H_0 ao nível de significância de 6%, ou seja, as duas raças tem a mesma propensão à doença.