MAP2220 - Fundamentos de Análise Numérica

$2^{\underline{o}}$ Semestre de 2020 - Prof. Nelson Kuhl

Prova 2 - 10/12/2020

Questão 1 (2.5 pontos) A função

$$F(z) = \int_0^z e^{-x^2}\,dx$$

aparece frquentemente em probabilidade e estatística. Deseja-se aproximar $F(1)$ e $F(2)$ pelo método de n-Simpsons com erro menor do que 0.01. Sabendo-se que

$$\left|\frac{d^4}{dx^4} e^{-x^2}\right| \leq 12$$

no intervalo $[0, 2]$, estime o número mínimo de repetições e calcule as aproximações. Verifique se os resultados obtidos estão dentro da tolerância especificada, dado que $F(1) = 0.74682$ e $F(2) = 0.88208$ com 5 algarismos significativos.

Questão 2 (3.0 pontos) Se Y é uma variável aleatória cuja distribuição é a normal padrão, então a probabilidade de que $|Y| \leq y$, para algum $y > 0$, é igual a $\frac{2}{\sqrt{\pi}} F\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$, onde F é a função da Questão 1. Usando a forma de Newton, construa o polinômio interpolador da tabela

z	0	1	2
$F(z)$	$F(0)$	$F(1)$	$F(2)$

e use-o para aproximar a probabilidade de que $|Y| \leq 2$. Estime o erro da aproximação obtida a partir da fórmula do erro para a interpolação polinomial (para $F(1)$ e $F(2)$, use os valores dados com 5 algarismos significativos).

Questão 3 (3.0 pontos) Deseja-se obter uma fórmula de integração numérica

$$\int_0^4 f(x)\,dx \approx a_1 f(1) + a_2 f(2) + a_3 f(3)$$

que seja exata para polinômios de grau menor ou igual a 2. Para isso, representamos o polinômio interpolador da tabela de f em relação aos pontos $x_j = j$, $j = 1, 2, 3$, na forma de Lagrange e concluimos que

$$a_j = \int_0^4 L_j(x)\,dx, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

onde L_j, $j = 1, 2.3$, são os polinômios de grau 2 da forma de Lagrange em relação aos pontos $x_j = j$, $j = 1, 2, 3$.

(a) Explique por que as integrais (1) podem ser calculadas pela fórmula de 1-Simpson, gerando o resultado exato;

(b) obtenha os coeficientes a_j, $j = 1, 2, 3$, calculando as integrais (1) usando a fórmula de 1-Simpson;

(c) use a fórmula de integração numérica obtida para aproximar $\int_0^\pi \operatorname{sen} t\,dt$ (sim, você deve usar mudança de variável). Compare com o resultado exato.

Questão 4 (1.5 pontos) Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ pontos distintos. Prove que

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^{n+1} L_j(0) = (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n$$

onde $L_j(x)$ são os polinômios da forma de Lagrange relativamente aos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
Sugestão: Pense no polinômo interpolador para a função $f(x) = x^{n+1}$.