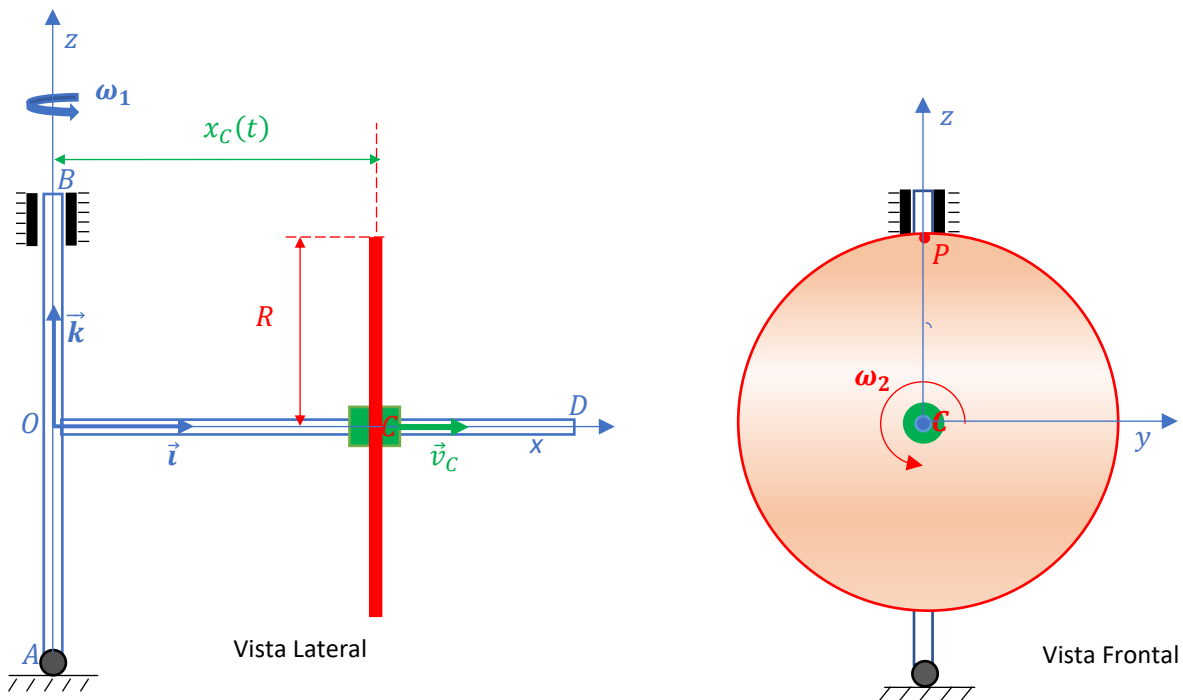




1ª Questão (3,0 pontos). O mecanismo ilustrado na figura abaixo é constituído por 3 componentes: 1) um suporte $ABOD$ (desenhado em azul) vinculado à articulação A e ao mancal radial B , que gira com velocidade angular constante ω_1 em torno do eixo vertical; 2) uma luva C (desenhada em verde), que desliza ao longo da haste OD do suporte $ABOD$ com velocidade constante v relativa à haste; 3) um disco de raio R , solidário à luva C que gira em torno da haste OD com velocidade angular constante ω_2 . O sistema de referências móvel $Oxyz$ é ligado ao suporte $ABOD$ e, no instante mostrado na figura, o ponto P da periferia do disco encontra-se na posição $(x_C, 0, R)$. Nita: Todas as respostas devem ser expressas no sistema de coordenadas $Oxyz$.



Pedem-se:

- A velocidade absoluta do ponto C .
- A aceleração absoluta do ponto C ;
- O vetor rotação absoluta do disco;
- O vetor aceleração rotacional absoluta do disco;
- A velocidade absoluta do ponto P ;
- A aceleração absoluta do ponto P .

RESOLUÇÃO

A velocidade absoluta do ponto C é:

$$\vec{v}_C = v\vec{i} + \omega_1\vec{k} \wedge (x_C\vec{i}) = v\vec{i} + \omega_1x_C\vec{j}$$

(a) ½ ponto

A aceleração absoluta do ponto C é dada por:



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{C,rel} + \vec{a}_{C,ar} + \vec{a}_{C,c}$$

onde

$$\vec{a}_{C,rel} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{C,ar} = \vec{a}_O + \dot{\omega}_1 \vec{k} \wedge (x_C \vec{i}) + \omega_1 \vec{k} \wedge [\omega_1 \vec{k} \wedge (x_C \vec{i})] = \vec{0} + \vec{0} - \omega_1^2 x_C \vec{i} = -\omega_1^2 x_C \vec{i}$$

$$\vec{a}_{C,c} = 2\omega_1 \vec{k} \wedge \vec{v}_{C,rel} = 2\omega_1 \vec{k} \wedge v \vec{i} = 2\omega_1 v \vec{j}$$

Portanto, a aceleração absoluta do ponto C é:

$$\vec{a}_C = -\omega_1^2 x_C \vec{i} + 2\omega_1 v \vec{j} \quad \text{(b) } \frac{1}{2} \text{ ponto}$$

O vetor rotação absoluta do disco é dado por

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{ar} + \vec{\omega}_{rel} = \omega_1 \vec{k} + \omega_2 \vec{i} \quad \text{(c) } \frac{1}{2} \text{ ponto}$$

O vetor aceleração rotacional do disco é dada por:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{ar} + \vec{\alpha}_c = \vec{0} + \vec{0} + \vec{\omega}_{ar} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \omega_1 \vec{k} \wedge \omega_2 \vec{i} = \omega_1 \omega_2 \vec{j} \quad \text{(d) } \frac{1}{2} \text{ ponto}$$

A velocidade absoluta do ponto P é dada por:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (P - C) = v \vec{i} + \omega_1 x_C \vec{j} + (\omega_2 \vec{i} + \omega_1 \vec{k}) \wedge R \vec{k} = v \vec{i} + (\omega_1 x_C - \omega_2 R) \vec{j} \quad \text{(e) } \frac{1}{2} \text{ ponto}$$

A aceleração absoluta do ponto P é dada por:

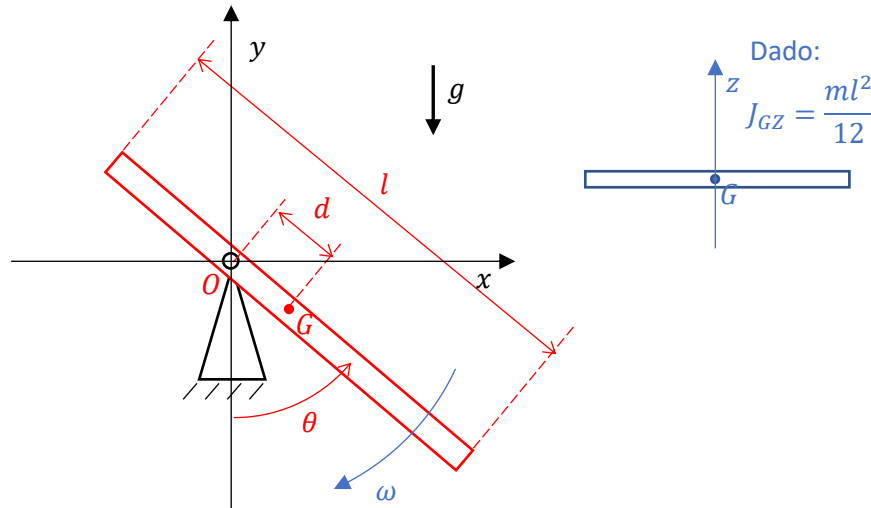
$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \wedge (P - C) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - C)]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_P = -\omega_1^2 x_C \vec{i} + 2\omega_1 v \vec{j} + (\omega_1 \omega_2 \vec{j}) \wedge R \vec{k} + (\omega_1 \vec{k} + \omega_2 \vec{i}) \wedge [(\omega_1 \vec{k} + \omega_2 \vec{i}) \wedge R \vec{k}]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_P = (2\omega_1 \omega_2 R - \omega_1^2 x_C) \vec{i} + 2\omega_1 v \vec{j} - \omega_2^2 R \vec{k} \quad \text{(f) } \frac{1}{2} \text{ ponto}$$



2ª Questão (3,0 pontos) Uma barra delgada e homogênea, de comprimento L e massa m , é articulada em O a uma distância d do seu centro de massa, estando restrita a mover-se no plano Oxy , conforme ilustrado na figura.



(a) Determine o momento de inércia J_{Oz} da barra.

(b) Sabendo que a barra parte da posição angular $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ com velocidade angular inicial ω_0 no sentido horário, determine o menor valor de ω_0 em módulo, para que a barra não mude o sentido de rotação.

RESOLUÇÃO

Aplicando-se o Teorema de Steiner obtém-se o momento de inércia J_{Oz} da barra:

$$J_{Oz} = \frac{mL^2}{12} + md^2 \quad (1,0 \text{ ponto})$$

Sendo o peso da barra a única força que realiza trabalho, o Teorema da Energia Cinética se expressa como:

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} J_{Oz} (\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{mL^2}{12} + md^2 \right) (\omega^2 - \omega_0^2) = mgd \cos \theta$$

Sendo

$$\omega \geq 0 \text{ em } \theta = \frac{\pi}{2}$$

A condição para a barra não mudar o sentido da rotação se expressa como:

$$\omega = 0 \text{ em } \pi.$$



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Introduzindo-se essa condição limite na expressão do Teorema da Energia Cinética, obtém-se:

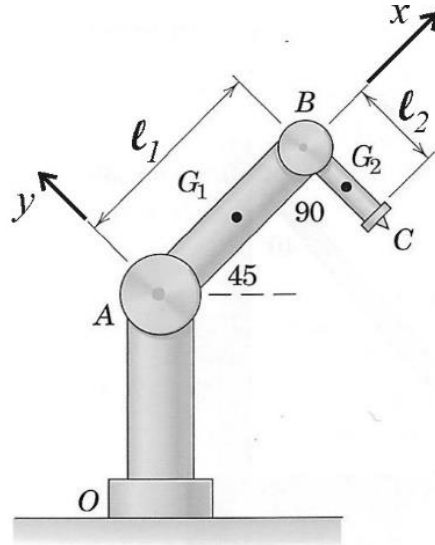
$$\omega_0^2 = \frac{24gd}{l^2 + 12d^2}$$

(2,0 pontos)

que é o menor valor de ω_0 compatível com um movimento rotativo.



3ª Questão (4,0 pontos). A figura abaixo representa um dispositivo robótico movendo-se num plano vertical, com aceleração da gravidade g . Na extremidade A da coluna fixa OA há um pequeno motor elétrico que aplica um momento (anti-horário) M_A na extremidade A do braço AB , fazendo este braço girar em torno de A com velocidade angular ω_1 e aceleração angular $\dot{\omega}_1$, dados. Na extremidade B do braço AB há outro pequeno motor, que aplica o momento M_B (anti-horário) no braço BC , fazendo-o girar com velocidade angular ω_2 e aceleração angular $\dot{\omega}_2$. A massa do braço AB é m_1 , a do braço BC é m_2 e ambos podem ser considerados como hastes delgadas homogêneas.



Para a posição mostrada na figura, e usando o sistema de eixos indicado, pede-se:

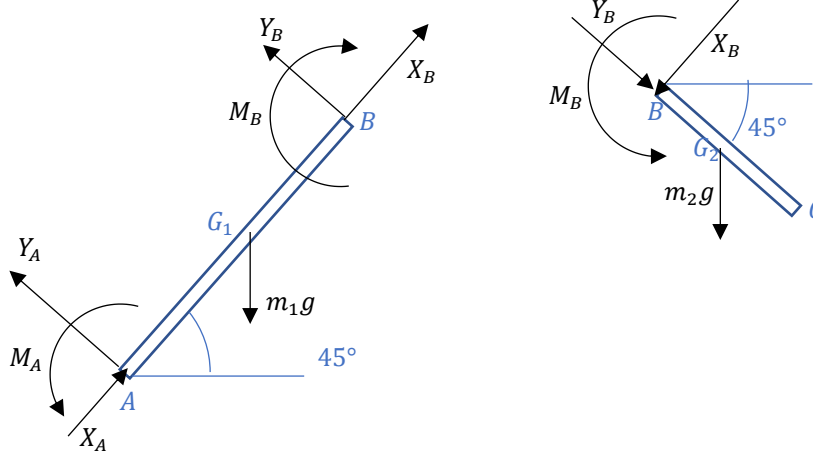
- desenhar os diagramas de corpo livre dos braços AB e BC ;
- escrever as equações do Teorema da Resultante (TR) e do Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA) para o braço BC ;

Supondo que o motor em B trave a conexão dos braços AB e BC na posição relativa mostrada, pede-se:

- obter as expressões de ω_2 e $\dot{\omega}_2$, \vec{a}_{G_1} e \vec{a}_{G_2} em função de ω_1 , $\dot{\omega}_1$, das massas e das dimensões dadas na figura;
- determinar o momento exercido pelo braço AB sobre o braço BC .

RESOLUÇÃO

Os diagramas de corpo livre das barras são apresentados na figura a seguir.



(1,0 ponto)

As equações dos teoremas da resultante e da quantidade de movimento angular para o braço BC são apresentadas a seguir

TR

$$m_2 \vec{a}_{G_2} = m_2 (a_{G_2x} \vec{i} + a_{G_2y} \vec{j}) = \left(-X_B - m_2 g \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vec{i} + \left(-Y_B - m_2 g \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_2 a_{G_2x} = -X_B - m_2 g \frac{\sqrt{2}}{2} & (1) \\ m_2 a_{G_2y} = -Y_B - m_2 g \frac{\sqrt{2}}{2} & (2) \end{cases}$$

TQMA

$$\vec{H}_{G_2} = J_{G_2} \omega_2 \vec{k} = \frac{m_2 l_2^2}{12} \omega_2 \vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_{G_2} = \frac{m_2 l_2^2}{12} \dot{\omega}_2 \vec{k} = \vec{M}_{G_2} = \left(X_B \frac{l_2}{2} + M_B \right) \vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_2 l_2^2}{12} \dot{\omega}_2 = X_B \frac{l_2}{2} + M_B \quad (3)$$

(1,0 ponto)

As relações cinemáticas solicitadas são apresentadas a seguir:

- articulação B travada:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \quad (4)$$

e

$$\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega} \quad (5)$$

- braço AB:

$$\vec{a}_{G_1} = a_{G_1x} \vec{i} + a_{G_1y} \vec{j} = \vec{a}_A + \vec{\omega} \wedge (G_1 - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G_1 - A)] =$$

$$= \vec{0} + \dot{\omega} \vec{k} \wedge \frac{l_1}{2} \vec{i} + \omega^2 \vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge \frac{l_1}{2} \vec{i} \right] = \frac{l_1}{2} (-\omega^2 \vec{i} + \dot{\omega} \vec{j}) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \vec{a}_{G_1} = a_{G_1x}\vec{i} + a_{G_1y}\vec{j} = \frac{l_1}{2}(-\omega^2\vec{i} + \dot{\omega}\vec{j}) \Rightarrow \begin{cases} a_{G_1x} = -\frac{l_1}{2}\omega^2 & (6) \\ a_{G_1y} = \frac{l_1}{2}\dot{\omega} & (7) \end{cases}$$

e

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - A)] = l_1(-\omega^2\vec{i} + \dot{\omega}\vec{j})$$

- braço BC:

$$\vec{a}_{G_2} = a_{G_2x}\vec{i} + a_{G_2y}\vec{j} = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G_2 - B) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G_2 - B)] =$$

$$= l_1(-\omega^2\vec{i} + \dot{\omega}\vec{j}) + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \left(-\frac{l_2}{2}\vec{j}\right) + \omega^2\vec{k} \wedge \left[\vec{k} \wedge \left(-\frac{l_2}{2}\vec{j}\right)\right] =$$

$$= \left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2l_1\right)\vec{i} + \left(\dot{\omega}l_1 + \omega^2\frac{l_2}{2}\right)\vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{G_2} = a_{G_2x}\vec{i} + a_{G_2y}\vec{j} = \left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2l_1\right)\vec{i} + \left(\dot{\omega}l_1 + \omega^2\frac{l_2}{2}\right)\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} a_{G_2x} = \dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2l_1 & (8) \\ a_{G_2y} = \dot{\omega}l_1 + \omega^2\frac{l_2}{2} & (9) \end{cases}$$

(1,0 ponto)

De (1) e (8) obtém-se:

$$-X_B - m_2g\frac{\sqrt{2}}{2} = m_2\left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2l_1\right) \Rightarrow X_B = -m_2\left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2l_1 + g\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Substituindo

 X_B em (3) resulta:

$$\frac{m_2l_2^2}{12}\dot{\omega} = -m_2\frac{l_2}{2}\left(\dot{\omega}\frac{l_2}{2} - \omega^2l_1 + g\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - M_B \Rightarrow M_B = \frac{m_2l_2}{2}\left(-l_1\omega^2 + \frac{2l_2}{3}\dot{\omega} + g\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \mathbf{(1,0\ ponto)}$$