# PTC3420 - Programação Matemática - 2a. PROVA - 10/12/2020

**1a. QUESTÃO (3,0 pontos)** Uma fábrica produz semanalmente dois tipos de produto: P1 e P2. Produto P1 gera um lucro de $c_1 = 3$ reais por unidade de P1 e o produto P2 gera um lucro de $c_2 = 2$ reais por unidade de P2. Para a fabricação desses produtos são necessárias duas etapas de trabalho, T1 e T2, com as seguintes características:

i) a fabricação de uma unidade do produto P1 requer 2 horas de T1 e 1 hora de T2.

ii) a fabricação de uma unidade do produto P2 requer 1 hora de T1 e 1 hora de T2.

O número de horas de T1 disponível é limitado a $b_1 = 80$ horas/semana e de T2 a $b_2 = 50$ horas/semana. Deseja-se obter a produção semanal dos produtos P1 e P2 de forma a máximizar o lucro semanal.

a) Trace a região de factibilidade desse problema, calcule todos os pontos extremos, e obtenha a solução ótima.

b) Agora utilize o método simplex na forma tableau e escreva o tableu ótimo final desse problema. Compare com a solução do item a).

c) Suponha que o vetor $b$ seja alterado para $b_{novo} = b + \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix}$. Determine a faixa de valores de $\delta$, ou seja, o número de horas de T1, de modo que a base obtida no item b) continue ótima. Escreva o valor da função objetivo e da produção semanal ótima dos produtos P1 e P2 em função de $\delta$.

d) Suponha que o vetor $c$ seja alterado para $c_{novo} = c + \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$. Determine a faixa de valores de $\lambda$, ou seja, o lucro gerado por unidade do produto P1, de modo que a base obtida no item b) continue ótima. Escreva o valor da função objetivo e da produção semanal ótima dos produtos P1 e P2 em função de $\lambda$.

**2a. QUESTÃO (1,5 pontos)** Determine todos os pontos de máximo local, mínimo local e pontos de sela da equação:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^3 - 4x_1 x_2.$$

**3a. QUESTÃO (1,5 pontos)** Aplique as condições de otimalidade de 1a e 2a ordem e resolva o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & 14x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2 + 7 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3. \end{aligned}$$

**4a. QUESTÃO (2,0 pontos)**: Aplique as condições de otimalidade de 1a e 2a ordem e obtenha os **mínimos** e **máximos** de:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + 3x_1 x_2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

sujeito a

$$x_1^2 + x_2^2 = 8$$

**5a. QUESTÃO (2,0 pontos)** Considere, para $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, o seguinte problema de controle :

$$\begin{aligned} \min \;\; & J(u) = \sum_{k=0}^{T} \alpha^k \; \frac{u(k)^2}{2} \\ \text{sujeito a} \;\; & x(k+1) = x(k) + u(k), \;\; k = 0, 1, \ldots, T \\ & x(0) = x_0, \quad x(T+1) = x_f. \end{aligned}$$

a) Aplique as condições de otimalidade de 1a ordem e determine a lei de control ótima $u^*(k)$, $k = 0, \ldots, T$.

b) Escreva o valor do custo ótimo $J(u^*)$ (ou seja o valor da função objetivo quando se utiliza o controle ótimo $u^*(k)$ do item a)).

c) Considerando $x_0 = 0$, $x_f = 31$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $T = 4$, obtenha $u^*(k)$, $k = 0, \ldots, 4$ e $J(u^*)$.