A EQUAÇÃO DE LIÉNARD

Consideremos a equação de Líénard:

$$u'' + f(u)u' + g(u) = 0 \tag{1}$$

sendo f e g fun cões de classe c^1 em $\mathbb{R}$. Façamos $G(u) = \int_0^u g(u)\, d\, u$, $F(u) = \int_0^u f(u)\, d\, u$, satisfazendo as hipóteses:
(1) $g(0) = 0, ug(u) > 0 (u \neq 0)$
(2) $uF(u) > 0$ para $|u| < a$, $a > 0$.

Consideremos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \tag{2}$$

(obtido com a mudança de variáveis: $x = u$, $y = u' + F(u)$).
Seja $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$.
Das hipóteses segue que V é positiva definida em todo o plano.

Date: December 8, 2020.

Seja agora a faixa:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -a < x < a\}.$$

Temos $\dot{V}(x, y) = -g(x)F(x)$ e das hipóteses segue que V é um funcional de Lyapunov para o sistema (1) em Ω e a origem é um equilíbrio estável.

Agora, consideremos o conjunto

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \dot{V} = 0\}.$$

Temos então que $E = \{(x, y) \in \Omega | x = 0.\}$ e o único subconjunto invariante de E é a origem.

Segue do teorema de La Salle que a origem é assintoticamente estável.

Queremos agora encontrar uma vizinhança específica da origem que é atraída pela origem. Para isto, consideremos as curvas de nível $C_\lambda = \{(x, y) | V(x, y) = \lambda\}$ do funcional V. Para $c = 0$ $C_\lambda = \{0\}$ e para valores positivos suficientemente pequenos existem $x_1 = x_1(\lambda) < 0$ e $x_2 = x_2(\lambda) > 0$ no intervalo $[-a.a]$ tais que $G(x_1) = G(x_2) = \lambda$. Observemos que $x_1(\lambda)$ e $x_2(\lambda)$ são respectivamente, funções decrescente e crescente de λ. Seja λ_{max} o maior valor de λ para o qual $[x_1(\lambda), x_2(\lambda)]$ está contido em $[-a, a]$. Para $0 < \lambda < \lambda_{\max}$, C_λ será uma curva fechada, formada pela união dos gráficos das funções $y = \pm\sqrt{2(\lambda - G(x))}$.

O interior da curva $C_{\lambda_{\max}}$ será um conjunto invariante e para todo ponto neste conjunto teremos pelo Princípio de La Salle que a órbita passando por p converge para a origem.

Consideremos novamente o sistema (2) e suponhamos agora que $F(u) = \int_0^u f(u)\,d\,u$, satisfaça as seguintes hipóteses:

(1) $\lim_{|u|\to\infty} F(u) = +\infty$
(2) $F(u) < 0$ para $u < -a$ ou $0 < u < b$
$F(u) > 0$ para $u > a$ ou $-a < u < 0$.

$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$. é ainda positivo definido e
Das hipóteses segue que V é positiva definida em todo o plano e agora $\dot{V}(x,y) = -g(x)F(x) \geq 0$, p na faixa $-a \leq x \leq b$.
Como vimos, para valores pequenos de λ a curva de nível $C_\lambda = \{(x,y)|V(x,y) = \lambda\}$ do funcional V. será uma curva fechada, formada pela união dos gráficos das funções $y = \pm\sqrt{2(\lambda - G(x))}$.

Se $\phi(t, p)$ é solução com p próximo da origem, a solução passa pela curva C_{λ_0} para λ_0 suficientemente pequeno em direção ao exterior da curva. Segue que a origem é *instável.*

Consideremos agora a curva $y = F(x)$ no plano de fase.

Sobre esta curva, teremos $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = -g(x)$. Suponha que uma solução comece no ponto $A = (0, A_2)$ para algum $A_2 > 0$ Uma análise do campo mostra que esta solução se move para a direita quando t cresce e continua com inclinação negativa, at encontrar a curva $y = F(x)$, no ponto C A curva pode ou não interceptar interceptar a reta $x = b$, no ponto B. Sobre a curva $y = F(x)$ temos $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} < 0$. Abaixo dela, temos $\dot{x} < 0$. Portanto, a solução não passa mais pela curva, até atingir o eixo dos y. Como $\frac{dy}{dx}$ é finito neste trecho ela não pode "explodir" e vai passar pelo eixo dos y, em algum ponto E (talvez passando por D na reta $x = b$). Por argumentos semelhantes, mostramos que a solução vai voltar ao eixo dos y, no ponto $F = (0, F_2)$.

Se $A = (0, A_2)$ está suficientemente próxima da origem, então o trecho da solução de A até F estará contida em uma região preenchida por curvas de nível fechadas de V e onde $\dot{V} > 0$. Daí obtemos $F_2 > A_2$.

Agora, vamos mostrar que ocorre o contrário se A_2 é suficientemente grande. Para isto consideramos a função energia V nos pontos $A, B.C, D, E, F$.

Ao long da solução $(x(t), y(t)$. teremos

$$V(x(t), y(t)) = \frac{y(t)^2}{2} + G(x(t)).$$

Considerando y como função de x, ao longo da curva solução, teremos

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{g(x)F(x)}{y - F(x)}.$$

No trecho da solução entre A e B, teremos

$$V_B - V_A = -\int_0^b \frac{g(x)F(x)}{y - F(x)} > 0$$

Quando A_2 cresce, $y_2 \to +\infty$ e b permanece fixo. Assim, temos

$$\lim(V_B - V_A) = 0.$$

Similarmente, $\lim(V_E - V_D) = 0$.

No trecho de B a D, olhando x como função de y, obtemos

$$\frac{dV}{dy} = F(x).$$

Como $F(x) > 0$, para $x > b$, obtemos

$$V_B - V_D = -\int_{y_{2D}}^{y_{2B}} F(x)dy > 0$$

Como $\lim_{|u|\to\infty} F(u) = +\infty$, e $y_{2B} - y_{2D}$ cresce, teremos

$$\lim_{A_2\to\infty}(V_B - V_D) = +\infty.$$

Combinando esses resultados sobre os limites, concluímos que , para $A_2 > 0$, suficientemente grande $V_E < V_A$.

Procedendo analogamente no trecho de E até F obteremos que $V_F < V_E < V_A$ e então $F_2 < A_2$, se $A_2 > 0$ é suficientemente grande.

Por continuidade, existirá um valor de A_2 tal que $F_2 = A_2$.

Usando ideias similares não é dificil esboçar o ' *retrato de fase* de equações do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \tag{3}$$

equivalente à equação

$$u'' + g(u) = 0 \tag{4}$$

usando o funcional energia $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$.

Como $\dot{V} = 0$ as soluções de (3) estarão contidas nas curvas de nível de V.

Dizemos então que V é uma **integral primeira** para o campo em (3). Os equilíbrios são os pontos da forma $(x_0, 0)$, x_0 sendo uma raiz qualquer de g. Uma análise das curvas de nível de V fornece muitas informações sobre as propriedades de estabilidade desses equilíbrios e, mais geralmente, sobre o comportamento das órbitas do campo.