Segunda avaliação do curso
Física moderna I – IF diurno 2º sem. 2020

Professor Tiago Fiorini

11 de novembro de 2020

Questão 1 (1,5 pontos) – Em que condições a função $e^{i(kx-\omega t)}$ é solução da equação de Schrödinger? **(0,5 ponto)**. O que acontece ao se tentar normalizar essa função para todo o espaço em x? O que isso significa? **(0,5 ponto)** Como se obtém uma função de onda para o caso da partícula livre a partir desses resultados? **(0,5 ponto)**

> **Resposta:** *Essa função é solução da equação de Schrödinger na condição de E > V(x) e V(x) sendo constante, e representa o caso da partícula livre. Essa função não pode ser normalizada pois ela supõem precisão arbitrária no momento, logo viola o princípio da incerteza de Heisemberg. Isso significa uma indeterminação total na posição da partícula. A forma correta de se representar a função de onda de uma partícula libre é por meio de uma soma infinita de funções desse tipo, cada termo com diferente amplitude e comprimento de onda, de forma a descrever um pacote de onda cuja extensão represente a indeterminação na posição da partícula.*

Questão 2 (1,0 pontos) – Uma função de onda pode ter sua componente espacial e temporal separadas na forma $\Psi(x,t)=\psi(x).\phi(t)$ em sistemas em que o potencial não depende do tempo.

(a) Mostre que é possível se obter uma solução geral para a parte $\phi(t)$, que é independe do potencial, e uma equação de Schrödinger independente do tempo, separada, somente para a parte $\psi(x)$. **(0,5 ponto)**

> **Resposta:** *Ver slides 35 a 43 da Aula 6 – A equação de Schrödinger.*

(b) Qualquer função pode representar uma função de onda? Quais são as condições que uma solução da equação de Schrödinger deve satisfazer para representar uma função de onda? **(0,5 ponto)**

> **Resposta:** *Não. Ver as condições no slide 5 da Aula 7 – A quantização na teoria de Schrödinger.*

Questão 3 (1,0 pontos) – Um elétron e um próton com as mesmas energias cinéticas encontram um potencial barreira de mesma altura e largura. Qual dos dois tem maior probabilidade de tunelamento? Por que? **(0,5 ponto)** E o que é mais eficiente para reduzir a probabilidade de tunelamento de uma mesma partícula, dobrar o potencial ou dobrar a espessura da barreira? **(0,5 ponto)**

Resposta: *Usando as seguintes expressões:* $T \approx 16\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)e^{-2\alpha}$ *e* $\alpha = k_{II}\,a=\sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)}$ *temos:* $T_e \propto e^{-\sqrt{m_e}}$ *e* $T_p \propto e^{-\sqrt{m_p}}$.

Como $m_p \approx 2000\,m_e$ *temos* $T_e \gg T_p$ *. Logo um elétron tem probabilidade de tunelamento muito maior que a de um próton nas mesmas condições.*

A forma mais fácil de se resolver essa questão é com um exemplo numérico. Supondo um elétron com 1 eV incidindo em um potencial barreira de 2 eV e largura 0,1 nm, temos uma transmissão de ~10^{-6}*. Dobrando o valor do potencial da barreira a transmissão cai para ~*10^{-11}*. Enquanto que dobrando a largura da barreira a transmissão cai para ~*10^{-12}*. Logo, é mais efetivo para se suprimir o efeito de tunelamento aumentar a largura da barreira que aumentar a altura da barreira.*

Questão 5 (2,5 pontos) – Usando os operadores adequados, determine os valores médios esperados $\langle x \rangle$ **(0,5 ponto)**, $\langle x^2 \rangle$ **(0,5 ponto)**, $\langle p \rangle$ **(0,5 ponto)** e $\langle p^2 \rangle$ **(0,5 ponto)** de uma partícula no primeiro estado excitado de um potencial quadrado infinito. Sendo $\Delta x^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2$ e $\Delta p^2=\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2$, como esses resultados se relacionam com o princípio da incerteza de Heisenberg **(0,5 ponto)**?

Resposta:

$$\psi_2(x)=\sqrt{\left(\frac{2}{L}\right)}\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x).\,\hat{x}\,\psi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x).\,x\,\psi(x)\,dx\\ &=\left(\frac{2}{L}\right)\int_0^L x\,\text{sen}^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx=\left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{L^2}{4\pi^2}\right)\int_0^{2\pi}u\,\text{sen}^2u\,du=\\ &=\left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{L^2}{4\pi^2}\right)\left[\frac{u^2}{4}-\frac{\cos(2u)}{8}-\frac{u.\,\text{sen}(2u)}{4}\right]_0^{2\pi}=\frac{L}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle &=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x).\,\hat{x^2}\,\psi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x).\,x^2\,\psi(x)\,dx\\ &=\left(\frac{2}{L}\right)\int_0^L x^2\,\text{sen}^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx=\left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{L^3}{8\pi^3}\right)\int_0^{2\pi}u^2\,\text{sen}^2u\,du=\\ &=\left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{L^3}{8\pi^3}\right)\left[\frac{u^3}{6}-\left(\frac{u^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\text{sen}(2u)-\frac{u}{4}\cos(2u)\right]_0^{2\pi}=\frac{L^2}{3}-\frac{L^2}{8\pi^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle p\rangle &=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x).\,\hat{p}\,\psi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x).\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)\,dx\\ &=-i\hbar\left(\frac{4\pi}{L^2}\right)\int_0^L\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cdot dx=\\ &=-i\hbar\left(\frac{4\pi}{L^2}\right)\left(\frac{L}{2\pi}\right)\int_0^{2\pi}\text{sen}\,u\cdot\cos u\cdot du-i\hbar\left(\frac{4\pi}{L^2}\right)\left(\frac{L}{2\pi}\right)\left[\frac{\sin^2u}{2}\right]_0^{2\pi}=0\end{aligned}$$

$$\langle p^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x).\hat{p}^2\psi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x).\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x)\,dx$$

$$=\hbar^2\left(\frac{8\pi^2}{L^3}\right)\int_0^L \mathrm{sen}^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cdot dx=\hbar^2\left(\frac{8\pi^2}{L^3}\right)\left(\frac{L}{2\pi}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2 u\cdot du=$$

$$=\hbar^2\left(\frac{8\pi^2}{L^3}\right)\left(\frac{L}{2\pi}\right)\left[\frac{u}{2}-\frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{2\pi}=\frac{4\pi^2\hbar^2}{L^2}$$

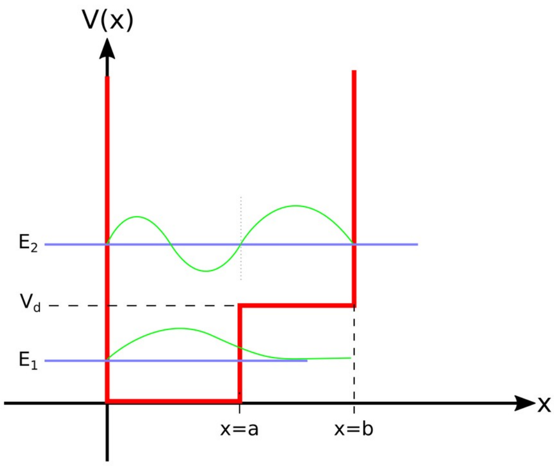
$$\Delta x^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2 \qquad \Delta p^2=\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2 \qquad \Delta x\cdot\Delta p=\left(\frac{L}{\sqrt{12}}\right)\cdot\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)=\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{12}}>\frac{\hbar}{2}$$

$$=\frac{L^2}{3}-\frac{L^2}{8\pi^2}-\frac{L^2}{4}\approx\frac{L^2}{12} \qquad =\frac{4\pi^2\hbar^2}{L^2}$$

Respeitando assim, o princípio da incerteza de Heisenberg.

Questão 6 (2,0 pontos) – Use argumentos qualitativos baseados na equação de Schrödinger para esboçar funções de onda nos estados com energias $E_1 < V_d$ **(1,0 ponto)** e $E_2 > V_d$ **(1,0 ponto)** no potencial apresentado na figura abaixo. Detalhe: nas regiões x < 0 e x > b o potencial V(x) é muito grande. Justifique suas respostas detalhadamente para cada região.

Resposta:



Argumentos:
- *Interfaces com regiões de potencial infinito impõem o valor nulo à função de onda*
- *Interface com regiões de potencial finito impõem um decaimento exponencial da função de onda*
- *Maiores diferenças entre a energia mecânica e a potencial resultam em comprimento de onda menores*

Questão 6 – Verdadeiro ou falso? Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, e justifique a sua resposta com sentenças curtas. **(0,5 ponto cada item)**

V | F	**O princípio da incerteza de Heisenberg nos diz que o limite tecnológico nos impede de conhecer a posição e o momento das partículas com precisão arbitrária simultaneamente**

Justificativa	*Falso. O princípio da incerteza de Hisemberg estabelece um limite para o produto das incertezas do momento linear e posição que independe dos recursos tecnológicos.*
V | F	**A equação de Schrödinger não possui uma demonstração formal**
Justificativa	*Verdadeiro. Como uma equação fundamental, a equação de Schrödinger possui uma argumentação lógica, mas não uma demonstração que parta de algo mais fundamental.*
V | F	**Um observável físico é todo e qualquer valor de função de onda calculado em uma posição do espaço e num determinado instante de tempo**
Justificativa	*Falso. Uma observável física é qualquer variável passível de ser medida por meio de um experimento, como a posição, a energia, o momento linear, o momento angular, etc.*
V | F	**A quantização se apresenta na teoria de Schrödinger em condições de confinamento**
Justificativa	*Verdadeiro. A quantização se apresenta ao se impor restrições à função de onda em dois pontos no espaço, gerados pela condição de confinamento.*