1 Variáveis Aleatórias Contínuas (Capítulo 4- Parte 1)

Em ideias: uma variável aleatória discreta X tem a ela associada uma distribuição de massa de probabilidade, enquanto uma variável aleatória contínua, X, tem a ela associada a chamada função densidade de probabilidade de X, que denotaremos por $f_X(x)$.

Definição 1.1 *Uma variável aleatória X é chamada de contínua se existir uma função $f_X(x)$, chamada de função densidade de probabilidade de X, tal que $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$ e*

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

para todo o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Observações:

(1) Note que continuamos a ter $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

(2) $\int_a^b f_X(x)dx$ é a área do gráfico de $f_X(x)$ entre o intervalo $[a, b]$.

(3) Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f_X(x)dx = 0$.

(4) Por (3), sabemos que incluir ou excluir os extremos de um intervalo não tem nenhum efeito em sua probabilidade, ou seja,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b).$$

(5) $\mathbb{P}(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$. Graficamente falando, isso significa que a área inteira sob o gráfico da função densidade de probabilidade deve ser igual a 1.

(6) A não ser que ser que seja explicitado, $I_X = \mathbb{R}$.

(7) É importante saber que apesar da função densidade de probabilidade ser usada para calcular probabilidades de eventos, $f_X(x)$ não é a probabilidade de qualquer evento particular. Ou seja , é essencial saber que $f_X(x)$ pode assumir valores maiores que 1.

1.1 Esperança e Variância

A esperança matemática de uma variável aleatória contínua é obtida de forma semelhante ao caso discreto. Informalmente falando, trocam-se apenas o somatório pela integral e a $\mathbb{P}(X = x)$ por "$f_X(x)dx$".

Definição 1.2 *A esperança de uma variável aleatória contínua X, com função de densidade $f_X(x)$, é dada por*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx.$$

Como consequência da definição acima, a variância de uma v.a X contínua também é calculada de modo "similar"ao caso discreto.

Definição 1.3 *Seja X uma variável aleatória contínua, a variância de X é dada por:*

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x) dx,$$

Mas podemos utilizar a expressão alternativa:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

com $\mathbb{E}(X^2)$ sendo definido por:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx.$$

O próximo exemplo foi retirado de Lima e Magalhães (2005).

Exemplo 1.1 *Arqueólogos estudaram uma certa região e estabeleceram um modelo teórico para a variável X, comprimento de fósseis da região (em cm). Suponha que X seja uma variável aleatória contínua com a seguinte função densidade de probabilidade:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+1), & se \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Vamos encontrar $\mathbb{E}(X)$ e $Var(X)$.

Temos,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{4} \cdot (x+1) \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}\ cm^2.$$

Para encontrar a variância precisamos primeiramente calcular a $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (x+1) \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Portanto, obtemos

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{5}{3} - \frac{49}{36} = \frac{11}{36}\ cm^2.$$

2 Função de distribuição

Para caracterizar uma variável aleatória, podemos usar tanto a função de distribuição $F(x)$, como a distribuição de massa de probabilidade e a função densidade de probabilidade, para o caso discreto e contínuo, respectivamente. No caso de uma variável aleatória X, com $f_X(x)$, se tivermos a função de distribuição conseguimos recuperar a função de densidade de probabilidade.

Definição 2.1 *A função de distribuição de uma variável aleatória X contínua é definida em termos da $f_X(x)$, como*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\ dx,\ \forall\ x \in \mathbb{R},$$

tal que,

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}.$$

Voltando ao exemplo 2.1

Exemplo 2.1

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+1), & se \;\; 0 \leq x \leq 2 \\ \\ 0, & caso \; contrário. \end{cases}$$

Vamos encontrar $F_X(x)$. Temos,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dy + \int_{0}^{x} \frac{1}{4} \cdot (y+1) \cdot dy = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{y^2}{2} \Big|_0^x + y \Big|_0^x \right] = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{x^2}{2} + x \right],$$

para $0 \leq x \leq 2$ e zero (0), caso contrário.

Derivando $F_X(x)$ em relação a x temos:

$$\frac{1}{4} \cdot \left[\frac{2x}{2} + 1 \right] = \frac{1}{4} \cdot (x+1),$$

para $0 \leq x \leq 2$ e zero (0), caso contrário, recuperando a $f_X(x)$.

2.0.1 Exercícios

1. A f.d.p. de uma variável aleatória X é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/3, & \text{se} \;\; 0 \leq x < 1 \\ 2/3, & \text{se} \;\; 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Encontre $\mathbb{E}(X)$.

   (b) Encontre $Var(X)$.

   (c) Faça um gráfico de $f_X(x)$.

   (d) Encontre $F_X(x)$.

   (e) Faça um gráfico de $F_X(x)$.

   (f) Encontre $F_X(-2)$.

   (g) Encontre $F_X(1/3)$.

   (h) Encontre $F_X(1000)$.

2. Seja X uma variável aleatória contínua com f.d.p.

$$f_X(x) = \begin{cases} k \cdot x, & \text{para} \;\; 0 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

   onde k é uma constante.

   (a) Determine o valor de k.

   (b) Calcule $\mathbb{P}(1/4 < X \leq 2)$.

   (c) Encontre $\mathbb{E}(X)$.

(d) Encontre $Var(X)$.

(e) Faça o gráfico de $f_X(x)$.

(f) Encontre $F_X(x)$, a função de distribuição de X, e faça seu gráfico.

(g) Encontre $F_X(-2567)$.

(h) Encontre $F_X(0.76)$.

(i) Encontre $F_X(1679)$.