SISTEMAS LINEARES NÃO HOMOGÊNEOS EM $\mathbb{R}^n$

Consideremos agora o sistema:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{F}(t) \tag{1}$$

sendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, textbf F(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \ddots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{F}$ e $\mathbf{A}$, contínuas.

Como vimos, se $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $x_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}$ é um conjunto L.I. de soluções do sistema homogêneo associado:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A(t)x}, \tag{2}$$

então a matriz

Date: December 6, 2020.

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

é uma *matriz fundamental* de (2), ou seja, satisfaz a equação matricial:

$$\frac{d}{dt}\Phi \;= \mathbf{A}\Phi$$

e a solução geral de (2) é dada por $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C}$,

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

sendo $\mathbf{C}$ uma matriz coluna de n constantes arbitrárias $c_1, c_2, \cdots, c_n$.

1. Variação dos parâmetros

De modo análogo ao que foi feito para equações de segunda ordem, podemos procurar soluções do sistema não homogêneo 1, substituindo a matriz coluna constante $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$. por uma matriz coluna dependente de t: $\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$.

Substituindo $\mathbf{X}$, por $\Phi(t)\mathbf{U}(t)$, na equação (1), obtemos

$$\begin{aligned} \Phi(t)\mathbf{U}'(t) + \Phi'(t)\mathbf{U}(t) &= \mathbf{A}(t)\Phi(t)U(t) + \mathbf{F}(t) \\ \Leftrightarrow \Phi(t)\mathbf{U}'(t) + \mathbf{A}(t)\Phi(t)\mathbf{U}(t) &= \mathbf{A}(t)\Phi U(t) + \mathbf{F}(t) \\ \Phi(t)\mathbf{U}'(t) &= \mathbf{F}(t). \end{aligned}$$

Multiplicando por $\Phi^{-1}(t)$, obtemos
$\mathbf{U}'(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t) \Rightarrow \mathbf{U}(t) = \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,d\,t.$

Assim, uma solução particular do sistema (1) é dada por

$$\mathbf{X}_p = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,d\,t.$$

e a solução geral é

$$\mathbf{X} = \Phi(t)\mathbf{C} + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t)\,d\,t, \tag{3}$$

que é a **fórmula da variação das constantes.**

Exemplo 1. *Encontre a solução geral do sistema não homogêneo*

$$\boldsymbol{X}' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{X} + \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Em primeiro lugar vamos resolver o istema homogêneo

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

A equação característica é $\lambda^2 + 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ ou $\lambda = -5$. Os autovetores correspondentes são $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Portanto, uma matriz fundamental é

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1e^{-2t} & 1e^{-5t} \\ 1e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Uma solução particular do sistema não homogêneo é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_p &= \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)\,d\,t \\
&= \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{bmatrix} d\,t \\
&= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{bmatrix} d\,t \\
&= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ -\frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}1e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto, a solução geral no intervalo $(-\infty, +\infty)$ é

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}1e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} \\
&= c_1 \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}1e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Suponhamos agora, que estamos interessados no problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\,t}\mathbf{X} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t) \\ &\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{aligned}$$

Escolhendo a solução particular do problema não homogêneo como

$$\mathbf{X}_p = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\mathbf{F}(s)\,d\,s,$$

e substituindo na fórmula de variação das constantes (3), obtemos

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{C} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,\mathbf{F}(s)\,d\,s,$$

Impondo a condição inicial, teremos $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0) = \Phi(t_0)\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{C} = \Phi(t_0)^{-1}\mathbf{X}_0$ e obtemos uma forma alternativa da fórmula de variação das constantes:

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\mathbf{X}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,\mathbf{F}(s)\,d\,s. \tag{4}$$

Em particular, se $\Phi(t_0) = \mathbf{I}$, a única solução do PVI é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \Phi(t)\mathbf{X}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,\mathbf{F}(s)\,d\,s \\ &= \Phi(t)\mathbf{X}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,\mathbf{F}(s)\,d\,s \end{aligned} \tag{5}$$

Finalmente, no caso em que $\mathbf{A}$ tem coeficientes constantes, vimos que $e^{(t-t_0)\mathbf{A}} = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ e a fórmula (4) fica:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}(t) &= e^{\mathbf{A}(t-t_0}\mathbf{X}_0 + e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\,\mathbf{F}(s)\,d\,s \\
&= e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\,\mathbf{F}(s)\,d\,s. \qquad (6)
\end{aligned}
$$