

MATRIZES FUNDAMENTAIS E EXPONENCIAL DE MATRIZES

1. MATRIZES FUNDAMENTAIS

Consideremos o sistema (não necessariamente de coeficientes constantes):

$$(1) \quad \frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$$

sendo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ e } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

Como vimos, se $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $x_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}$ é um conjunto L.I. de soluções do sistema (1), então a solução geral de (1) é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= c_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \cdots + c_n x_{1n} \\ c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \cdots + c_n x_{2n} \\ \vdots \\ c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \cdots + c_n x_{nn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A última equação pode ser reconhecida como o produto de uma matriz $n \times n$ por outra $n \times 1$. Em outras palavras, a solução geral pode ser escrita como um produto: $\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}$, sendo \mathbf{C} uma matriz coluna de n constantes arbitrárias c_1, c_2, \dots, c_n e $\Phi(t)$ a matriz $n \times n$ cujas colunas são as entradas dos vetores solução do sistema (1):

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Definição 1. A matriz $\Phi(t)$ acima é denominada uma **matriz fundamental** do sistema 1.

Valem as seguintes propriedades:

Proposição 2.

- Uma matriz fundamental é não singular para todo t no seu intervalo de definição.

- Uma matriz fundamental $\Phi(t)$ do sistema 1, satisfaz a equação matricial:

$$\dot{\Phi} = \mathbf{A}(t)\Phi .$$

- A (única) solução do problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{X} &= \mathbf{A}\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{X}_0 \end{aligned}$$

é dada por $\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}$, sendo $\Phi(t)$ uma matriz fundamental do sistema 1 e $\mathbf{C} = \Phi^{-1}(t_0)\mathbf{X}_0$. Ou seja, $\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{X}_0$. Em particular, se $\Phi(t_0) = \mathbf{I}$, a única solução do PVI é dada por $\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\mathbf{X}_0$.

2. EXPONENCIAL DE MATRIZES

Consideremos novamente o sistema de equações na forma matricial com a matriz \mathbf{A} de *coeficientes constantes*, ou seja, o sistema:

$$(2) \quad \frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

com os coeficientes de \mathbf{A} independentes de t .

No caso de uma única equação, ou seja, para o problema de valor inicial, $\dot{x} = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $c(0) = x_0$, sabemos que a solução é dada pela exponencial $x(t) = e^{at}x_0$. Isto pode sugerir a possibilidade de definir a *exponencial de matrizes* $e^{\mathbf{A}t}$ de tal forma que a solução do problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ seja, analogamente, $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0$.

2.1. Definição por série de potências. Lembrando que $f(x) = e^x$ é igual à sua série de Taylor em torno da origem, isto é:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

definimos

Definição 3. A exponencial de uma matriz \mathbf{A} $n \times n$:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \cdots = \sum_0^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!},$$

É possível mostrar que a série acima de fato converge para qualquer matriz \mathbf{A} de coeficientes reais (e mesmo complexos) e que satisfaz propriedades análogas à da exponencial de números. Em particular, vale que

- (1) Se \mathbf{A} é matriz diagonal então a exponencial $e^{\mathbf{A}}$ também é matriz diagonal e os elementos da diagonal principal de $e^{\mathbf{A}}$ são as exponenciais dos elementos correspondes da diagonal de \mathbf{A} .
- (2) Se \mathbf{A} é matriz nilpotente, isto é $\mathbf{A}^n = 0$ para n suficientemente grande então a série da exponencial se torna uma soma *finita*.
- (3) Se $\mathbf{B} = \mathbf{MAM}^{-1}$ então $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{M}e^{\mathbf{A}}\mathbf{M}^{-1}$.

Exemplo 4. Calcular $e^{\mathbf{A}}$ nos casos:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Supondo que podemos derivar a somatória termo a termo, podemos provar o seguinte resultado importante

Proposição 5. *Se \mathbf{A} é matriz $n \times n$ então $\frac{d}{dt}e^{(t-t_0)\mathbf{A}} = \mathbf{A}e^{(t-t_0)\mathbf{A}} = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{A}$. e $e^{(t-t_0)\mathbf{A}}_{t=t_0} = \mathbf{I}$*

Ou seja, $e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{X}_0$ é a (única) solução do problema de valor inicial:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{X} &= \mathbf{A}\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) &= \mathbf{X}_0\end{aligned}$$

Uma aplicação deste resultado ao cálculo de exponencias de matrizes é o seguinte

Corolário 6. *Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes $n \times n$ que comutam então $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$.*

Exemplo 7. *Calcular $e^{t\mathbf{A}}$ sendo*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Agora consideremos novamente o problema de valor inicial:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{X} &= \mathbf{A}\mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t_0) &= \mathbf{X}_0.\end{aligned}$$

Sabemos da proposição 5 que a única solução deste PVI é

$$\mathbf{X}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{X}_0.$$

Por outro lado, da proposição 2 da seção anterior, temos que, se $\Phi(t)$ for uma matriz fundamental do sistema (2) então

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{X}_0.$$

Portanto, teremos necessariamente $e^{(t-t_0)\mathbf{A}} = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$. Em particular, se $\Phi(t_0) = \mathbf{I}$, então

$$e^{(t-t_0)\mathbf{A}} = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0).$$

Vejamus como usar essa igualdade para calcular a exponencial de matrizes.

Exemplo 8. *Vimos que a solução geral do sistema $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, sendo*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \text{ é dada por:}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= C_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & e^{5t} \\ e^{-t} & e^{-t} & -e^{5t} \\ 0 & e^{-t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, a matriz $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & e^{5t} \\ e^{-t} & e^{-t} & -e^{5t} \\ 0 & e^{-t} & e^{5t} \end{bmatrix}$ é solução fundamen-

tal do sistema.

Portanto

$$e^{t\mathbf{A}} = \Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & e^{5t} \\ e^{-t} & e^{-t} & -e^{5t} \\ 0 & e^{-t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Observação 9. *Uma outra forma de calcular a exponencial de A , e^{tA} é escrevê-la na forma?*

$A = DN$, sendo D matriz diagonal e N nilpotente, $AD = DA$, o que é sempre possível, como vimos.