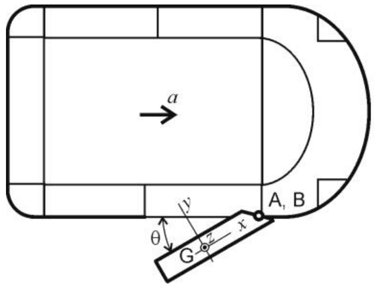
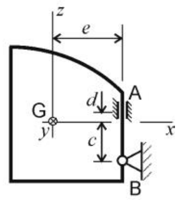
TC-25: Um automóvel está com a porta do passageiro aberta, num ângulo θ_0, e começa a se movimentar com aceleração a constante, conforme mostrado na figura. Essa porta tem centro de massa G e está montada na carroceria do carro através de uma articulação em B e um anel de eixo paralelo a Gz em A. O sistema de coordenadas (G,x,y,z) está fixo à porta, e são dados a massa M e os momentos e produtos de inércia dessa porta em relação aos eixos do sistema. No instante em que a porta está na posição θ, ela tem rotação $\vec{\omega}$ e aceleração rotacional $\dot{\vec{\omega}}$. Pede-se, em função dos dados e usando o sistema (G,x,y,z):





(a) obtenha as expressões de $\omega\ e\ \dot{\omega}$ em função de θ;

(b) determine os esforços em A e B, em função de $a, \theta, \omega, \dot{\omega}$.

Indicar a alternativa correta para a componente Y_B pedida no item b):

$$-\frac{Md(a\sin\theta+\dot{\omega}e)+\left(J_{xz}\dot{\omega}-J_{yz}\omega^2\right)}{c+d}$$

$$\frac{Md(a\sin\theta+\dot{\omega}e)-\left(J_{xz}\dot{\omega}-J_{yz}\omega^2\right)}{c+d}$$

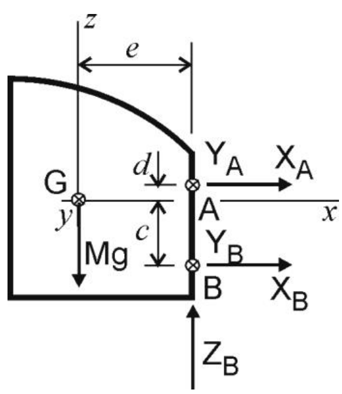
$$-\frac{Md(a\sin\theta+\dot{\omega}e)-\left(J_{xz}\dot{\omega}-J_{yz}\omega^2\right)}{c+d}$$

$$\frac{Md(a\sin\theta+\dot{\omega}e)+\left(J_{xz}\dot{\omega}+J_{yz}\omega^2\right)}{c+d}$$

$$-\frac{Md(a\sin\theta-\dot{\omega}e)+\left(J_{xz}\dot{\omega}-J_{yz}\omega^2\right)}{c+d}$$

Solução:

Diagrama de corpo livre:



Cinemática:

$\vec{\omega}=\omega\vec{k};\ \vec{a}_A=a\cos\theta\,\vec{\imath}-a\sin\theta\,\vec{\jmath}$

$$\vec{a}_G=\vec{a}_A+\dot{\vec{\omega}}\wedge(G-A)+\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(G-A)]$$
$$=(a\cos\theta+\omega^2e)\vec{\imath}-(a\sin\theta+\dot{\omega}e)\vec{\jmath}$$

TR: $\vec{a}_G = (X_A + X_B)\vec{\imath} + (Y_A + Y_B)\vec{\jmath} + (Z_B - Mg)\vec{k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(a\cos\theta + \omega^2 b) = X_A + X_B & (1) \\ -M(a\sin\theta + \dot{\omega} b) = Y_A + Y_B & (2) \\ 0 = Z_B - Mg & (3) \end{cases}$$

Quantidade de movimento angular: $\vec{H}_G = -J_{xz}\omega\vec{\imath} - J_{yz}\omega\vec{\jmath} + J_z\omega\vec{k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_G = -J_{xz}\dot{\omega}\vec{\imath} - J_{xz}\omega\left(\omega\vec{k}\wedge\vec{\imath}\right) - J_{yz}\dot{\omega}\vec{\jmath} - J_{yz}\omega\left(\omega\vec{k}\wedge\vec{\jmath}\right) + J_z\dot{\omega}\vec{k}$$
$$= \left(-J_{xz}\dot{\omega} + J_{yz}\omega^2\right)\vec{\imath} - \left(J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\dot{\omega}\right)\vec{\jmath} + J_z\dot{\omega}\vec{k}$$

TQMA: $\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G^{ext} = (A - G)\wedge\vec{F}_A + (B - G)\wedge\vec{F}_B = (-Y_A d + Y_B c)\vec{\imath} + (X_A d - Z_B b - X_B c)\vec{\jmath} + (Y_A + Y_B)b\vec{k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -J_{xz}\dot{\omega} + J_{yz}\omega^2 = -Y_A d + Y_B c & (4) \\ -\left(J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\dot{\omega}\right) = X_A d - Z_B e - X_B c & (5) \\ J_z\dot{\omega} = (Y_A + Y_B)e & (6) \end{cases}$$

Solução das equações:

De (2) e (6): $-M(a\sin\theta + \dot{\omega}e) = \frac{J_z\dot{\omega}}{e} \Rightarrow \boldsymbol{\dot{\omega} = -\frac{Mae\sin\theta}{J_z + Me^2}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega^2 = \frac{2Mae(\cos\theta - \cos\theta_0)}{J_z + Me^2}}$ (partiu do repouso)

De (3): $\boldsymbol{Z_B = Mg}$

Substituindo em (5): $-\left(J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\dot{\omega}\right) = X_A d - Mge - X_B c \Rightarrow X_A = X_B\frac{c}{d} + \frac{Mge - \left(J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\dot{\omega}\right)}{d}$

Substituindo em (1): $M(a\cos\theta + \omega^2 e) = X_B\frac{c}{d} + \frac{Mge - \left(J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\dot{\omega}\right)}{d} + X_B \Rightarrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{X_B = \frac{Md\left(a\cos\theta + \omega^2 e\right) - Mge + \left(J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\dot{\omega}\right)}{c + d}} \Rightarrow \boldsymbol{X_A = \frac{Mc\left(a\cos\theta + \omega^2 e\right) + Mge - \left(J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\dot{\omega}\right)}{c + d}}$

De (2): $Y_A = -M(a\sin\theta + \dot{\omega}e) - Y_B$

Substituindo em (4): $-J_{xz}\dot{\omega} + J_{yz}\omega^2 = -[-M(a\sin\theta + \dot{\omega}e) - Y_B]d + Y_B c \Rightarrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{Y_B = -\frac{Md(a\sin\theta + \dot{\omega}e) + \left(J_{xz}\dot{\omega} - J_{yz}\omega^2\right)}{c + d}} \Rightarrow \boldsymbol{Y_A = -\frac{Mc(a\sin\theta + \dot{\omega}e) - \left(J_{xz}\dot{\omega} - J_{yz}\omega^2\right)}{c + d}}$

Respostas:

a) $\dot{\omega} = -\frac{Mae\sin\theta}{J_z + Me^2}$; $\omega^2 = \frac{2Mae(\cos\theta - \cos\theta_0)}{J_z + Me^2}$

b) $X_A = \frac{Mc\left(a\cos\theta + \omega^2 e\right) + Mge - \left(J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\dot{\omega}\right)}{c + d}$; $X_B = \frac{Md\left(a\cos\theta + \omega^2 e\right) - Mge + \left(J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\dot{\omega}\right)}{c + d}$;

$Y_A = -\frac{Mc(a\sin\theta + \dot{\omega}e) - \left(J_{xz}\dot{\omega} - J_{yz}\omega^2\right)}{c + d}$; $Y_B = -\frac{Md(a\sin\theta + \dot{\omega}e) + \left(J_{xz}\dot{\omega} - J_{yz}\omega^2\right)}{c + d}$; $Z_B = Mg$