

Lista Plemelj e Hilbert, 03-dez - Entrega: 11-dez

1. A fórmula de Plemelj

$$\frac{1}{x - x_0 \pm i\varepsilon} = \text{VP} \frac{1}{x - x_0} \mp i\pi\delta(x - x_0) \quad (1)$$

é válida no sentido de distribuições, devendo ser aplicada a funções $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ “momentaneamente” restritas à reta real, na forma

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\varepsilon} dx = \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \mp i\pi f(x_0) \quad (2)$$

mas que são definidas no plano complexo e tendem a zero *em pelo menos uma* das condições $y \rightarrow +\infty$ ou $y \rightarrow -\infty$, em pontos $z = x + iy$. Porém, nas notas de aula, foi utilizada apenas a condição $f(z) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$, quando o valor principal é dado por

$$\begin{aligned} \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx &\equiv \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{x_0 - \eta} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \eta}^{-\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \right\} = \\ &= 2\pi i \sum_{\{\text{Im } z_j > 0\}} \text{res} \left(\frac{f(z)}{z - x_0}; z_j \right) + i\pi f(x_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Mostre que a fórmula de Plemelj permanece inalterada quando $f(z) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0$, mas que o valor principal passa a ser dado por

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = -2\pi i \sum_{\{\text{Im } z_j < 0\}} \text{res} \left(\frac{f(z)}{z - x_0}; z_j \right) - i\pi f(x_0). \quad (4)$$

As eqs. (3) e (4) podem ser simultaneamente válidas, se $f(z) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0$, mas, em geral, percebemos que 4 diferentes expressões podem surgir no lado direito da eq.(2). É bem mais compacto não explicitar o valor principal e escrever apenas a fórmula de Plemelj...

2. Calcule as transformadas de Hilbert das funções $\cos kx$ e $\sin kx$, mas, para cada uma delas, considerando separadamente se $k > 0$ ou $k < 0$ (o resultado muda!). As integrações por resíduos podem ser escritas sucintamente, com o auxílio de desenhos, como nas notas de aula.