MAT226 - Equações Diferenciais I

4a. Lista de Exercícios - 03/12/2020

1. Mostre que uma órbita do sistema autônomo $\dot{x} = f(x)$, f de classe C^1 se auto-interseçiona, a não então ela é fechada..

2. Encontre uma integral primeira V para o sistema no plano:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - 5y \\ \dot{y} &= x - y \end{cases}$$

   (Sugestão: Procure V da forma: $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$).

3. Esboce o plano de fase dos sistemas

   (a) $\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^3 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\operatorname{sen} \ x \end{cases}$

   chamando a atenção para os pontos de equilìbrio, soluções periódicas, orientação de soluções, conjuntos α e ω-limites, estabilidade e instabilidade, etc. Justifique todas as conclusões que você puder.

4. Mostre que as equações abaixo têm solução periódica

   (a) $\ddot{u} - (1 - u^2)\dot{u} + u^5 = 0$.

   (b) $\ddot{u} + (u^2 - 2)\dot{u} + u + \operatorname{sen} u = 0$. (use o resultado mostrado em aula para a equação de Liénard geral).

5. Mostre que o sistema abaixo tem solução periódica:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + x(x^2 + y^2 - 9) \\ \dot{y} &= -x + y(x^2 + y^2 - 9). \end{cases}$$

   (Neste caso, pode-se resolver explicitamente o sitema e determinar essa solução usando coordenadas polares).

6. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x\frac{f(r)}{r} \\ \dot{y} &= x + y\frac{f(r)}{r}, \qquad (r^2 = x^2 + y^2) \end{cases}$$

tem soluções periódicas, correspondendo aos zeros de $f(r)$. Determine essas soluções nos casos abaixo e discuta a estabilidade dos ciclos:

(a) $f(r) = (r-1)(r-2)(r-3)$,

(b) $f(r) = (r-4)^2(r^2 - 8r + 15)$.

7. Seja A uma matriz que possui todos os auto-valores λ, com parte real negativa, $Re(\lambda) < 0$.

(a) Mostre que a integral

$$\int_0^\infty \left(e^{As}\right)^t e^{As}\, ds$$

é convergente, onde $\left(e^{As}\right)^t$ denota a matriz transposta de $\left(e^{As}\right)$.

(b) Se

$$C = \int_0^\infty \left(e^{As}\right)^t e^{As}\, ds$$

mostre que

$$CA + A^t C = -I.$$

Sugestão: Integre os dois lados de

$$\frac{d}{d\,s}\left(\left(e^{As}\right)^t e^{As}\right) = \left(e^{As}\right)^t e^{As} A + A^t \left(e^{As}\right)^t e^{As}$$

para s variando de 0 a ∞.

(c) Seja C a matriz definida acima. Defina $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ por

$$V(x) = \langle Cx, x\rangle$$

Mostre que

i. V é definida positiva, isto é,

$$V(0) = 0 \quad ee \quad V(x) > 0, \quad \text{se} \quad x \neq 0.$$

(Lembre-se da igualdade $\langle A^t x, x\rangle = \langle x, Ax\rangle$

ii. Se $x(t)$ é não nula e satisfaz $\dot{x} = Ax$, mostre que

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}\langle Cx(t), x(t)\rangle < 0, \quad \forall t.$$

8. Seja $\dot{x} = -xf(x)$, onde $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $f(0) > 0$.

   (a) Verifique se $V(x) = |x|^2$ é uma função de Lyapunov.

   (b) Analise a estabilidade do ponto de equilíbrio $x = 0$.

9. Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x),$$

onde $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ é um campo gradiente, isto é, existe uma função $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tal que

$$f(x) = -gradV(x).$$

Mostre que:

   (a) $\dot{V} = -|gradV(x)|^2$,

   (b) Se $\bar{x}$ é um ponto de mínimo isolado de V, então $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema.

   (c) Se x é um ponto ω-limite ($x \in \omega(x_0)$, então x é um ponto de equilíbrio.

   (d) Considere a equação de Liénard;

$$u'' + f(u)u' + g(u) = 0 \tag{1}$$

sendo f e g funções de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e $G(u) = \int_0^u g(u)\,du$, satisfazendo as hipóteses:

$f(u) \geq -c$, $G(u) \geq -k$, c e k constantes positivas.

Mostre que as soluções dessa equações estão definidas para todo $t \geq 0$. (Sugestão: Mostre que $\lim_{|u|\to\infty} V(u) = +\infty$, para um conveniente funcional de Lyapunov.