ANA FRIEDLANDER

ELEMENTOS DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR

Capítulo 10

MÉTODO DE RESTRIÇÕES ATIVAS

Neste capítulo descrevemos um modelo de algoritmo para resolver problemas de minimização com restrições lineares de desigualdade.

A idéia básica é a seguinte: dado um ponto $x^k \in S$, definimos um subproblema de minimização com restrições de igualdade determinadas pelas restrições ativas em x^k. Se x^k não for ótimo para este subproblema, continuamos tentando resolver o subproblema escolhendo uma direção factível de descida e fazendo uma busca linear. Ao dar este passo existe a possibilidade de acrescentar uma ou mais restrições. Se isto acontecer o subproblema muda e continuamos trabalhando com um subproblema novo. Se x^k for o ótimo do subproblema (geometricamente, x^k é o minimizador na face do poliedro determinada pelas restrições ativas em x^k), testamos se x^k é solução ótima do problema. Se não for, escolhemos uma nova direção de descida factível e fazemos uma busca linear para determinar x^{k+1}. Este movimento nos faz abandonar a face que contém x^k, e podemos ter certeza que não voltaremos mais a esta face. Também, neste deslocamento mudamos de subproblema e o processo descrito se repete. Como o poliedro tem um número finito de faces que vão sendo descartadas, pode-se provar que este processo é finito.

O seguinte algoritmo formaliza a descrição do método.

Algoritmo 10.1 (Método de restrições ativas)

Dado $x^k \in S$, executar os seguintes passos.

Passo 1: *Determinar $\mathcal{I}_k \equiv \mathcal{I}(x^k)$ e $r(x^k)$.*

Se $\mathcal{I}_k = \emptyset$ e $\nabla f(x^k) = 0$, parar. (x^k é um ponto estacionário).

Se $\mathcal{I}_k = \emptyset$ e $\nabla f(x^k) \neq 0$, ir ao Passo 7.

Se $\mathcal{I}_k \neq \emptyset$, ir ao Passo 2.

Passo 2: *Resolver o seguinte sistema linear*

$$\nabla f(x^k) = A^t_{\mathcal{I}_k} \lambda.$$

Se o sistema não admite solução, (ou seja, x^k não é ponto estacionário do subproblema $\langle$ min $f(x)$ sujeita a $A_{\mathcal{I}_k} x = b_{\mathcal{I}_k} \rangle$), ir ao Passo 4.
Se o sistema tem solução ir ao Passo 3.

Passo 3: *Se $\lambda_i \leq 0$ para $1 \leq i \leq r(x^k)$, parar. (x^k é um ponto estacionário). Se $\lambda_j > 0$ para algum j ir ao Passo 7.*

Passo 4: *Achar $d_k \in Nu\,(A_{\mathcal{I}_k})$ tal que $\nabla^t f(x^k) d_k < 0$.*

Passo 5: *Determinar*

$$\overline{\alpha} = \min_{a_j^t d_k > 0} \{ \frac{b_j - a_j^t x^k}{a_j^t d_k} \} \, .$$

Passo 6: *Realizar uma busca linear na direção d_k para obter um tamanho do passo $\alpha_k \in (0, \overline{\alpha}]$ que garanta descenso suficiente.*

Se $\alpha_k < \overline{\alpha}$, fazer $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d_k$, $k = k + 1$ e ir ao Passo 2.

Se $\alpha_k = \overline{\alpha}$, fazer $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d_k$, $k = k + 1$ e ir ao Passo 1.

Passo 7: *Escolher uma direção factível e de descida d_k em x^k.*

Passo 8: *Igual ao Passo 5.*

Passo 9: *Realizar busca linear em $(0, \overline{\alpha}]$ garantindo descenso suficiente. Fazer $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d_k$, $k = k + 1$ e ir ao Passo 1.*

Lembramos que pontos estacionários são aqueles que satisfazem as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem.

A eficiência de um método particular de restrições ativas depende em grande parte dos métodos utilizados para resolver os subproblemas, que são métodos para resolver problemas com restrições de igualdade. Obviamente, se não dispomos de um método finito para os subproblemas há o risco de permanecer indefinidamente numa face não ótima do poliedro.

Para certas funções (as quadráticas) conhecemos métodos finitos e este esquema é viável. Contudo, também pode acontecer que sejam necessárias "demasiadas"iterações para chegar na face ótima. Naturalmente, o desejável é que este processo de identificação das restrições corretas seja rápido.

Estas observações sugerem que a construção de algoritmos eficientes para este tipo de problema não é uma tarefa simples. Em Fletcher [5] e Gill et al. [7] podem ser encontradas descrições e discussões de alguns métodos deste tipo.

Exercícios

10.1 Resolva graficamente o problema

$$\text{Minimizar } x^2 - xy + y^2 - 3x$$

$$\text{s.a. } x + y \leq 4, \; x, \; y \geq 0$$

usando um método de restrições ativas a partir do ponto $x^0 = (0,0)^t$.

10.2 Considere o problema de maximizar $f(x, y) = xy$ sujeita a $x + y \geq 1$ e $x + 2y \leq 2$. Aplique um método de restrições ativas, algébrica e geometricamente, a partir de $(a)(1,0)^t$ e $(b)(2,0)^t$, até encontrar a solução.

10.3 Resolva algébrica ou graficamente o problema abaixo por um método de restrições ativas, tomando como ponto inicial $(2,1)^t$ e *justificando* todos os passos.

$$\text{Minimizar } (x+1)^2 + (y-1)^2$$

$$\text{s.a. } x + y \geq 1, \; x + y \leq 3, \; x, \; y \geq 0.$$

10.4 Aplique um método de restrições ativas para resolver

$$\text{Minimizar } x^2 + xy + 2y^2 - 6x - 2y - 12z$$

$$\text{s.a. } x + y + z = 2, \; -x + 2y \; \leq 3, \; x, \; y, \; z \; \geq 0.$$