Universidade de São Paulo

Lista 2– 2020

Programação Matemática

PTC3420

Resposta do Exercício 1 Letra a)

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \end{bmatrix}$$

Letra b)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	-4	0	-4	-2	-40
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
1	-$\frac{1}{2}$	0	-$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	0	8	0	-2	-20
0	1	2	1	0	5
1	-$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
6	-2	10	0	0	0
0	1	2	1	0	5
3	-1	1	0	1	10

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix},\ c' = -\begin{bmatrix} 6 & -2 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tableau na forma padrão

$$\begin{array}{c|c|c} 0 & -(c_D - c_B' B^{-1} D) & c_B' B^{-1} b \\ \hline \mathrm{I} & B^{-1} D & B^{-1} b \end{array}$$

Verificação

$$B^{-1}D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{ccc} x_2 & x_4 & x_5 \\ \hline \end{array}$$

$$B^{-1}D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_3 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$c'_B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_3 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 6 \end{bmatrix} \end{array}, \ c'_D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$c'_B B^{-1}b = -\begin{bmatrix} 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = -40$$

$$c'_B B^{-1}D = -\begin{bmatrix} 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c'_D - c'_D B^{-1}D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Letra c)

$$c_{novo} = -\begin{bmatrix} 6 \\ \lambda \\ 12 \end{bmatrix} \rightarrow c'_D - c'_B B^{-1}D = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

tableau: $z_0 = -6 \times \frac{5}{2} - 12 \times \frac{5}{2} = -45$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	$\lambda - 3$	0	-5	-2	-45
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$

Tableau ótimo para $\lambda \leq 3$. O caso $\lambda = 3$ gera infinitas soluções:

$$x^1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \rightarrow z^1 = c'x^1 = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = -45$$

Colocando x_2 na base

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	0	-2	-6	-2	-50
0	1	2	1	0	5
1	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	5

$$x^2 = \begin{bmatrix}5\\5\\0\end{bmatrix} \rightarrow z^2 = c'x^2 = -\begin{bmatrix}6 & 2 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\5\\0\end{bmatrix} = -45$$

Soluções ótimas: $x^* = \zeta x^1 + (1-\zeta)x^2,\ \ 0 \leq \zeta \leq 1.$

Com $\lambda = 10$ vale a pena x_2 entrar na base. Pivotando,

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	7	0	-5	-2	-45
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	0	-14	-12	-2	-80
0	1	2	1	0	5
1	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	5

Solução ótima única: $x^* = \begin{bmatrix}5\\5\\0\end{bmatrix},\ \ z^* = -80$

Outra maneira de verificar que o tableau é ótimo para $\lambda \leq 3$:

$$c_{novo} = -\begin{pmatrix}6\\ \lambda\\ 10\end{pmatrix} = c + \begin{pmatrix}0\\ -2-\lambda\\ -2\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} B \quad D \\ \begin{bmatrix}a_3 & a_1 & a_2 & a_4 & a_5\end{bmatrix}\end{array}$$

$$B^{-1}D = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix},\ B^{-1}b = \begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

$$c'_B = \begin{bmatrix}c_3 & c_1\end{bmatrix},\ c'_D = \begin{bmatrix}c_2 & c_4 & c_5\end{bmatrix},\ c'_B B^{-1}D - c'_D = \begin{bmatrix}-4 & -4 & -2\end{bmatrix}$$

Como c_{novo} mudou para c_2 e c_3 temos que

$$c'_{Bnovo}B^{-1}D - c'_{Dnovo} = \begin{bmatrix}-4 & -4 & -2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2-\lambda & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}-3+\lambda & -5 & -2\end{bmatrix}$$

Letra d) Vamos mostrar que o ótimo não muda para $\lambda \geq 3$, sendo ótimo degenerado para $\lambda = 3$. Temos que:

$$b = \begin{bmatrix}6\\ \lambda\end{bmatrix} \rightarrow B^{-1}b = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ \lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ -1+\frac{\lambda}{3}\end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 3.$$

Outra maneira:

$$b_{novo} = b + \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda - 10 \end{bmatrix}, \quad B^{-1}b_{novo} = B^{-1}b + B^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda - 10 \end{bmatrix} = \dots$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}(\lambda - 10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{\lambda}{3} - 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 3.$$

Solução ótima é: $x_1^* = \frac{\lambda}{3} - 1$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 3$, $z^* = -6(\frac{\lambda}{3} - 1) - 10 \times 3 = -24 - 2\lambda$.

Resposta do Exercício 2 Invertendo o sinal da função objetivo e introduzindo as variáveis de folga temos:

$$\max 4x_1 - x_2 - x_3 \quad \rightarrow \quad -\min -4x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, \ \ i = 1, \dots 5 \end{cases}$$

Primeira fase:

$$\min y_1$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_4 + y_1 = 1 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, \ \ i = 1, 2, 3, \ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau 0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
0	0	0	0	0	-1	0
-2	1	0	-1	0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	1	0	1	0	1

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
-2	1	0	-1	0	0	1
-2	1	0	-1	0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	1	0	1	0	1

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
0	0	0	0	0	-1	0
-2	1	0	-1	0	1	1
2	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Fase 2

Tableau 0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
4	-1	-1	0	0	0
-2	1	0	-1	0	1
2	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
2	0	-1	-1	0	1
-2	1	0	-1	0	1
2	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	0	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Tableau ótimo, e a solução ótima (única) é:

$$x_1^* = \frac{1}{4}$$
$$x_2^* = \frac{3}{2}$$
$$x_3^* = x_4^* = x_5^* = 0$$
$$z^* = \frac{1}{2} = -1 + \frac{3}{2}$$
$$B = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e ainda, considerando o problema com a base correspondente ao início da Fase 2, a solução ótima do dual (denotado por D_2) é:

$$w^* = c_B' B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad w_1^* = 1, \; w_2^* = -1, \; z_w^* = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Problema dual D_2 (relativo à base no início da Fase 2) é max $w_1 + \frac{1}{2}w_2$ sujeito a:

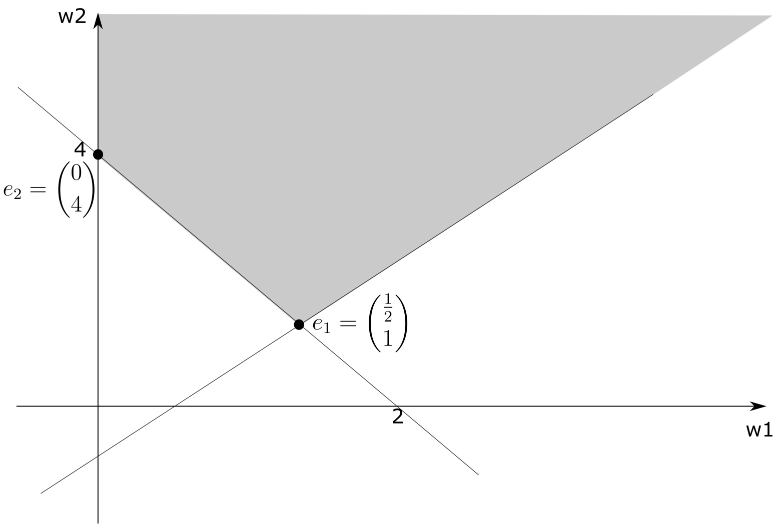
$$\begin{aligned} -2w_1 + \frac{1}{2}w_2 &\leq -4 \\ w_1 \leq 1, \; w_2 &\leq 1 \\ -w_1 + \frac{1}{2}w_2 &\leq 0, \\ w_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Problema dual D_1 (relativo ao problema na Fase 1) (D1)

$$\text{Dual: } \max w_1 + w_2$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} -2w_1 + w_2 \leq -4 \\ w_1 + \frac{1}{2}w_2 \leq 1 \\ w_1 \leq 1, w_2 \leq 0, w_1 \geq 0 \end{cases}$$

No gráfico, fazemos a troca de variáveis $w_2^+ = -w_2 \geq 0$.



Pontos extremos (considerando $w_2^+ = -w_2$): $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, Direções extremas: $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Note que e_1 é obtido resolvendo

$$\begin{cases} -2w_1 + w_2^+ = -2 \\ 2w_1 + w_2^+ = 4 \\ \hline 2w_2^+ = 2 \rightarrow w_2^+ = 1, w_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{que é ótimo : } \begin{cases} z^* = \frac{1}{2} \\ w_1^* = \frac{3}{2}, w_2^* = -1 (= -w_2^+) \end{cases}$$

Vamos verificar o resultado acima usando a representação da matrix A como na fase 1 e usando o teorema visto em aula que gera a solução ótima do dual pelo primal. Temos

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$B = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, c_B' = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \; w^* = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Resposta do Exercício 3 Fase 1

$$\min y_1$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5, \ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau 0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
0	0	0	0	0	-1	0
2	1	4	1	0	0	5
4	1	2	0	0	1	1
1	1	2	0	1	0	2

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
4	1	2	0	0	0	1
2	1	4	1	0	0	5
4	1	2	0	0	1	1
1	1	2	0	1	0	2

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
0	0	0	0	0	-1	0
0	$\frac{1}{2}$	3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$

Fase 2 $\quad \min x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3$

Tableau 0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	0
0	$\frac{1}{2}$	3	1	0	$\frac{9}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{7}{4}$

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	3	1	0	$\frac{9}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{7}{4}$

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$
-6	-1	0	1	0	3
2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$
-3	0	0	0	1	1

$$x_1^* = 0;\ x_2^* = 0;\ x_3^* = \frac{1}{2};\ x_4^* = 3;\ x_5^* = 1; z^* = \frac{1}{8}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$c'_B = \begin{bmatrix} c_4 & c_3 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Primal considerando Fase 2: $\min x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3$

$$\text{s.a.} \begin{cases} \frac{1}{2}x_2 + 3x_3 + x_4 = \frac{9}{2} \\ x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_5 = \frac{7}{4} \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$

Dual considerando Fase 2: $\max \frac{9}{2}w_1 + \frac{1}{4}w_2 + \frac{7}{4}w_3$

$$\text{s.a.} \begin{cases} w_2 \leq 1 \\ \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{4}w_2 + \frac{3}{4}w_3 \leq \frac{3}{4} \\ 3w_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{3}{2}w_3 \leq \frac{3}{4} \\ w_1 \leq 0, w_3 \leq 0 \end{cases}$$

$$w^* = c'_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_1^* = 0,\ w_2^* = \frac{1}{2},\ w_3^* = 0,\ z_w^* = \frac{1}{8}$$

Primal considerando Fase 1: $\min x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$

Dual considerando Fase 1: $\max 5w_1 + w_2 + 2w_3$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 2w_1 + 4w_2 + w_3 \leq 1 \\ w_1 + w_2 + w_3 \leq \frac{3}{4} \\ 4w_1 + 2w_2 + 2w_3 \leq \frac{1}{4} w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$w^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_1^* = 0, w_2^* = \frac{1}{8}, w_3^* = 0, z_w^* = \frac{1}{8}$$

Resposta do Exercício 4

$$\min x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$

Fase 1
Tableau 0

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
0	1	1	-1	0	1	1	0	2
0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0	3

Tableau 0

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	0	2	-1	-1	0	0	0	3
0	1	1	-1	0	0	1	0	2
0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0	3

Tableau 1

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	2	0	-1	1	0	0	-2	1
0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	-1	2

Tableau 2

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

Fase 2
Tableau 0

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	-1	2	0	0	0	0
0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

Tableau 1

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$
0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

Tableau 2

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	-3	0	2	0	0	-4
0	2	0	-1	1	0	1
0	1	1	-1	0	0	2
0	-1	0	1	0	1	1

Tableau 3

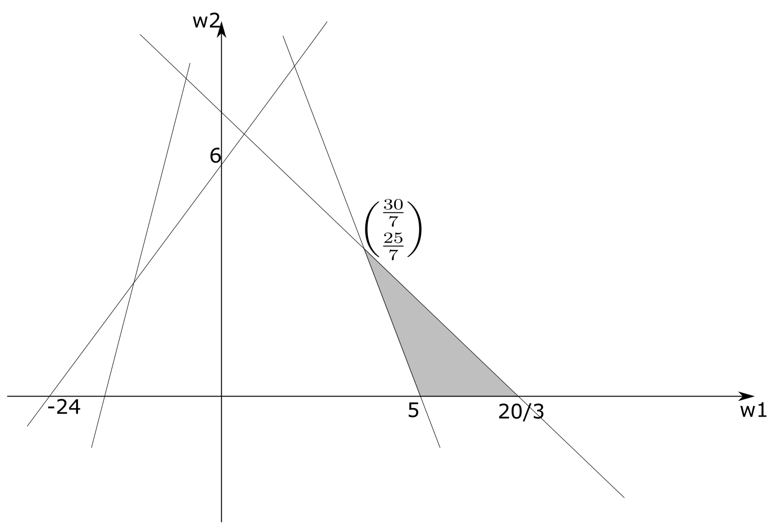
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	-1	0	0	0	-2	-6
0	1	0	0	1	1	2
0	0	1	0	0	1	3
0	-1	0	1	0	1	1

Resposta do Exercício 5 O problema na forma primal é

$$\min 10x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 20x_4 - 25x_5$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 \leq 19 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2_4 + x_5 \leq 57 \\ 8x_2 + 9x_3 \leq 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Agora na forma Dual temos,

$$\max -19w_1 - 57w_2 - 2w_3$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} -w_1 - 2w_2 - 8w_3 \leq 10 \\ -w_1 + 4w_2 \leq 24 \\ -2w_1 - 3w_2 - 9w_3 \leq 20 \\ 3w_1 + 2w_2 \leq 20 \\ -5w_1 - w_2 \leq -25 \end{cases}$$



O ótimo é quando $w_3 = 0$ (por inspeção) e com isso os três pontos extremos são:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 19 \times 5 = -95 \ \textit{otimo}$$
$$e_2 = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 19 \times \frac{20}{3} = -126.67$$
$$e_3 = \begin{pmatrix} \frac{30}{7} \\ \frac{25}{7} \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-19 \times 30 - 57 \times 25}{7} = -285$$

Restrições com folga no dual no ponto ótimo

$1^o) - w_1 - 2w_2 - 8w_3 < 0 \leftrightarrow x_1^* = 0$
$2^o) - w_1 - 4w_2 < 24 \leftrightarrow x_2^* = 0$
$3^o) - 2w_1 - 3w_2 - 9w_3 < 20 \leftrightarrow x_3^* = 0$
$4^o) - 3w_1 - 2w_2 < 20 \leftrightarrow x_4^* = 0$
$5^o) - w_1 - 2w_2 - 8w_3 < 0 \leftrightarrow x_6^* = 0$
$6^o)\ w_1 > 0 \leftrightarrow x_8* = 0$

Com isso temos que as variáveis básicas na solução ótima do primal são: x_5 , x_7, x_8. Resolvendo para essa base encontramos:

$$\begin{cases} 5x_5^* = 19 \\ x_5^* + x_7^* = 57 \\ x_8^* = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_5^* = \frac{19}{5} \\ x_7^* = 57 - \frac{19}{5} = \frac{266}{5} \\ x_8^* = 2 \end{cases} \quad z^* = -25\frac{19}{5} = -95$$

Resposta do Exercício 6 Seja x^* uma solução ótima finita de

$$\begin{aligned} &\min c'x \\ \text{s.a.} \ &\begin{cases} Ax = b, \quad x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Então pelo teorema da dualidade, existe uma solução ótima finita w^* do problema dual.

$$\begin{aligned} &\max w'b \\ \text{s.a.} \ &\begin{cases} w'A = c'. \end{cases} \end{aligned}$$

Consider agora o novo problema

$$\begin{aligned} &\min c'x \\ \text{s.a.} \ &\begin{cases} Ax = \hat{b}, \quad x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Se o novo problema não é factível, obviamente ele não é ilimitado. Como w^* é factível para o dual (pois factibilidade nesse caso só depende do vetor c) para qualquer solução factível x temos que $c'x \geq (w^*)'\hat{b}$, o que mostra que o novo problema não pode ser ilimitado.

Resposta do Exercício 7

$$\begin{aligned} &\min c'x \\ \text{s.a.} \ &\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0 \end{cases} \\ &\max w'b \\ \text{s.a.} \ &\begin{cases} w'A \leq c' \end{cases} \\ &c'x^* = w'\lambda \end{aligned}$$

onde x^* solução do primal e $\lambda \to$ solução do dual.

Letra a)

$$\begin{cases} a_1 x = b_1 \\ \vdots \\ a_k x = b_k \\ \vdots \\ a_m x = b_m \end{cases} \to \text{novo problema} \begin{cases} a_1 x = b_1 \\ \vdots \\ \mu a_k x = \mu b_k \\ \vdots \\ a_m x = b_m \end{cases} \to A_{novo} x^* = b$$

Dual:

$$\max w_1 + \cdots + w_k b_k + \cdots + w_m b_m$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} a_{11} w_1 + \cdots + \mu a_{k1} w_k + \cdots + a_{m1} w_m \leq c_1 \\ \ldots \\ a_{1n} w_1 + \cdots + \mu a_{kn} w_k + \cdots + a_{mn} w_m \leq c_n \end{cases}$$

$$\lambda_{novo} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \frac{\lambda_k}{\mu} \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \to \lambda'_{novo} A_{novo} = \lambda' A \leq c' \text{ é factível}$$

$$\lambda'_{novo} b_{novo} = \lambda' b = c' x^* \text{ é ótimo}$$

Letra b)

$$\begin{cases} a_1 x = b_1 \\ \vdots \\ a_k x = b_k \\ \vdots \\ a_r x = b_r \\ \vdots \\ a_m x = b_m \end{cases} \to \begin{cases} a_1 x = b_1 \\ \vdots \\ a_k x = b_k \\ \vdots \\ (a_r + \mu a_k) x = (b_r + \mu b_k) \\ \vdots \\ a_m x = b_m \end{cases} \to A_{novo} x^* = b$$

Dual:

$$\max w b_1 + \cdots + w_h b_h + \cdots + w_r (b_r + \mu b_h) + w_m b_m$$

$$\text{s.a. } \begin{cases} a_1 w_1 + \cdots + a_{k1} w_k + \cdots + (a_{r1} + \mu a_{k1}) w_r + \cdots + a_{m1} w_m \leq e_1 \\ \vdots \leq \vdots \\ a_{1n} w_1 + \cdots + a_{kn} w_k + \cdots + (a_{rn} + \mu a_{kn}) w_r + \cdots + a_{mn} w_{mn} \leq c_n \end{cases}$$

$$\lambda_{novo} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k - \mu\lambda_r \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda'_{novo}A_{novo} = \lambda' A \leq c' &\rightarrow \text{ satisfaz os restrições} \\ \lambda'_{novo}b_{novo} = \lambda' b = c'x^* &\rightarrow \text{é ótimo} \end{aligned}$$

Letra c)

$$\min c'x$$
$$\text{s.a. } \begin{cases} a_1 x = b_1 \\ \vdots \\ a_k x = b_k \\ \vdots \\ a_m x = b_m \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\min(c' + \mu a_k)x = \min(c'x) + \mu b_k$$
$$\text{s.a. } \begin{cases} a_1 x = b_1 \\ \vdots \\ a_k x = b_k \\ \vdots \\ a_m x = b_m \end{cases}$$

Dual

$$\max w_1 b_1 + \cdots + w_k b_k + \cdots + w_m b_m$$
$$\text{s.a. } \begin{cases} w_1 a_{11} + \cdots + w_k a_{k1} + \cdots + w_m b_{m1} \leq c_1 + \mu a_{k1} \\ \qquad \vdots \\ w_1 a_{1n} \cdots + w_k a_{kn} + \cdots + w_m b_{mn} \leq c_n + \mu a_{kn} \end{cases}$$

$$\lambda_{novo} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k + \mu \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \lambda'_{novo} A &\leq c' + \mu a_k \rightarrow \text{satisfaz as restrições} \\ \lambda'_{novo} b &= \lambda_1 b_1 + \cdots + (\lambda_k + \mu) b_k + \cdots + \lambda_m b_m \\ &= \lambda' b + \mu b_k = c' x^* + \mu b_k \rightarrow \text{ótimo} \end{aligned}$$

Exercício 8 Deseja-se minimizar a seguinte função:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2 - 6x_1 - 7x_2 8x_3 + 9$$

a Usando a condição necessária de 1ª ordem, encontre um ponto que poderia ser um mínimo local da função.

b Verifique que o ponto é um mínimo local usando a condição suficiente de 2ª orderm.

c Mostre que o ponto é um mínimo global.

Resposta:

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 4x_1 + x_2 - 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 7 \\ x_2 + 2x_3 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Fazendo $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7, \\ x_2 + 2x_3 &= 8. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{6 - x_2}{4}, x_3 &= \frac{8 - x_2}{2} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = \frac{6 - x_2}{4} + 2x_2 &+ \frac{8 - x_2}{2} \\ 6 - x_2 + 8x_2 + 16 - 2x_2 = 28 \rightarrow 5x_2 = 6 \rightarrow x_2 = \frac{6}{5}, x_1 = \frac{6}{5}, x_3 &= \frac{17}{5} \end{aligned}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow H(x,y)_{11} = 4 > 0$$

$$det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 8 - 1 = 7 > 0, det(Q) = 16 - 4 - 2 = 10$$

Logo, Q é definida positiva.

Como $H(x_1, x_2, x_3) = Q$ é definida positiva, $f(x_1, x_2, x_3)$ é convexo, e portanto, é um ponto de mínimo local , e mínimo global.

Exercício 9 Deseja-se minimizar a seguinte função:

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

a Obtenha as expressões para o gradiente e matriz hessiana da função.

b Qual é o numero global desta função? verifique que neste ponto a condição suficiente de 2ª ordem satisfeita.

c Mostre que a matriz hessiana é positiva definida para todo (x_1, x_2) tal que $f(x_1, x_2) < 0.0025$

Resposta:

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 200(x_2 - x_1^2)(-2x_1) + 2(1 - x_1)(-1) \\ 200(x_2 - x^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -400x_1(x_2 - x_1^2) - 2(1 - x_1) \\ 200(x_2 - x^2) \end{bmatrix}$$

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -400(x_2 - x_1^2) - 400x_1(-2x_1) + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{bmatrix} \nabla f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1^2,\ x_1 = 1$$

b)

$$minf(x_1, x_2) = 0 \text{ e } x_1 = 1,\ x_2 = 1. \text{ Neste caso, } \nabla f(1,1) = 0 \text{ e}$$

$$H(1,1) = \begin{bmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{bmatrix} \text{ e } (\lambda - 802)(\lambda - 200) - 16000 = 0$$

$$\lambda^2 - 1002\lambda + 160400 - 160000 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 1000\lambda + 400 = 0 \rightarrow \lambda = (1001.6\ ,\ 0.4)$$

Logo, é definida positiva.

Letra c

$$x_2 - x_1^2 = 0.005 \rightarrow H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 800x_1^2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{bmatrix} \rightarrow detH(x_1, x_2) = 160000x_1^2 - 160000x_1^2 = 0$$

$$detH(x_1, x_2) = 0 \rightarrow 200(-400(x_2 - x_1^2) + 2) = 0 \rightarrow x_2 - x_1^2 = 0.005$$

Portanto, $detH(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 - x_1^2 = 0$ e $(x_2 - x^2) < 0.005$

$$\begin{cases} detH(x_1, x_2) = 200(-400(x_2 - x_1^2) + 2) > 0 \\ H(x_1, x_2)_{11} = (-400(x_2 - x_1^2) + 2) + 800x_1^2 > 0 \end{cases}$$

Logo, $(x_2 - x_1^2) < 0.005 \ \rightarrow H(x_1, x_2)$ é definida positiva.

$$f(x_1, x_2) < 0.0025 \rightarrow 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 < 0.0025$$
$$100(x_2 - x_1^2)^2 0.0025 \rightarrow (x_2 - x_1^2)^2 < 0.000025 \rightarrow (x_2 - x_1^2) < 0.005 \rightarrow H(x_1, x_2)$$

é definida positiva.

Exercício 10 Determine o mínimo global da função:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4.$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 + 6x_1^2 + 4x_1^3 \\ 2x_2 - 2x_1 \end{bmatrix}$$
$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4 + 12x_1 + 12x_1^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$det(H(x_1, x_2)) = 4(6x_1^2 + 6x_1 + 2 - 1) = 4x_1(6x_1 + 6 + 1)$$
$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \iff x + 2 = x_1, \ x_1(4x_1^2 + 6x_1 + 2) = 0 \iff$$
$$\text{a) } x_1 = x_2 = 0, \quad \text{b) } x_1 = -1, \ x_2 = -1, \quad \text{c) } x_1 = -1/2, \ x_2 = -1/2$$
$$\text{a) } H(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, det = 4 > 0, tr = 6 > 0,$$
$$\implies \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \implies (0,0) \text{ mínimo local}$$
$$\text{b) } H(-1,-1) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, det = 4 > 0, tr = 6 > 0,$$
$$\implies \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \implies (-1,-1) \text{ mínimo local}$$
$$\text{c) } H(-1/2,-1/2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, det = -1 < 0, tr = 3 > 0,$$
$$\implies \lambda_1 \times \lambda_2 < 0 \implies (-1/2,-1/2) \text{ ponto de sela}$$
$$0 \leq (x_1 - x_2)^2 + x_1^2(x_1 + 1)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2(x_1^2 + 2x_1 + 1) = x_1^4 + 2x_1^3 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$$
$$\implies (0,0) \text{ mínimo global.}$$

Exercício 11 Seja

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1$$

a Determine um mínimo local de f.

b Porque a soluçã de a) é um mínimo global?

c Encontre o mínimo de f sujeito a $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Letra a)

$$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 3 \\ 2x_2 + x_1 \end{bmatrix},\ H(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\nabla(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} 0$$
$$-3x_2 = 3 \to x_2{*} = -1, x_1{*} = 2$$
$$det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 2)^2 - 1 = 0 \to \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \to \lambda = (3\ ,\ 1)$$

Letra b) Portanto, o Hessiano é positivo definido e o ponto é de mínimo global(a função é convexa).

Letra c)

$$g_1(x_1,x_2) = -x_1,\ g_2(x_1,x_2) = -x_2$$
$$\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 3 - u_1 & \\ x_1 + 2x_2 & -u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$u_1 x_1 = 0, u_1 \ \geq 0$$
$$u_2 x_2 = 0, u_2 \geq 0$$

1. $u_1 = 0,\ u_2 = 0, x_1 = 2, x_2 = -1$ não serve
2. $$u_1 > 0 \to x_1 = 0,\ u_2 = 0 \to \begin{cases} x_2 - u_1 = 3 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} u_1 = -3 \\ x_2 = 0, x_1 = 0 \end{cases}$$

   não serve
3. $$u_1 = 0, u_2 > 0 \to x_2 = 0 \begin{cases} 2x_1 = 3 \to x_1 = \frac{3}{2} \\ u_2 = x_1 \to u_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \quad Ok,\ f(\frac{3}{2}, 0) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$$
4. $$u_1 > 0, u_2 > 0 \to x_1 = 0, x_2 = 0, u_1 = -3u_2 = 0$$

   não serve

Exercício 12 Aplique as condições de 1ª e 2ª ordem a função

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 16x_3^2$$

sujeita a restrição $h(x_1, x_2, x_3) = 0$ e obtenha os pontos de mínimo local global para cada caso abaixo:

a $h(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 1$

b $h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 1$

c $h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - 1$

Resposta

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 8x_2 \\ 32x_3 \end{bmatrix} \to F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

Para o primeiro caso

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0 \\ 8x_2 = 0 \\ 32x_3 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \to \lambda = -2, x_2x_3 = 0$$

$$L = F > 0$$

Para o segundo caso

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 = 0 \\ 8x_2 + \lambda x_1 = 0 \\ 32x_3 = 0 \\ x_1x_2 = 1 \end{cases} \to 2x_1^2 + \lambda = 0$$

$$8x_2^2 + \lambda = 0$$

$$x_1^2 = 4x_2^2$$

$$x_1^2 = 4x_2^2$$

$$x_1 = \pm 2x_2 \to x_1^2 = 2 \to \lambda = -4 \to x_1 = \pm\sqrt{2} \to$$

$$\to x_2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \to \begin{cases} x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, x_3 = 0 \\ x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x_3 = 0 \end{cases} \quad \nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 8x_2 \\ 32x_3 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\nabla h = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = F + \lambda H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

$$M = (x_1, x_2, x_3), \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0 = (y_1, y_2, y_3) y_1 = -2y_2$$

$$\begin{bmatrix} -2y_2 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2y_2 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y_2 & 8y_2 & 16y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 16(y_2^2) + y_3^2 > 0$$

os 2 pontos são mínimos globais

$$f(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}, 0) = 2 + 2 = 4$$

Para o terceiro caso

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 x_3 = 0 \\ 8x_2 + \lambda x_1 x_3 = 0 \\ 32x_3 + \lambda x_1 x_2 = 0 \\ x_1 x_2 x_3 = 1 \end{cases} \quad \nabla h = \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1^2 + \lambda = 0 \to x_1 = \pm\sqrt{-\frac{-\lambda}{2}} \\ 8x_2^2 + \lambda = 0 \to x_2 = \pm\sqrt{\frac{-\lambda}{8}} \\ 32x_3^2 + \lambda = \to x_3 = \pm\sqrt{\frac{-\lambda}{32}} \end{cases}$$

$$(\frac{-\lambda^3}{512})^{1/2} = 1 \to -\lambda^3 = 512 \to \lambda = -8$$

$$x_1 = \pm 2, x_2 \pm 1, x_3 = \pm 1/2 \ e \ x_1 x_2 x_3 = 1$$

$$M = (y_1, y_2, y_3); (x_2 x_3 \ x_1 x_3 \ x_1 x_2)(y_1 \ y_2 \ y_3)' = 0$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{cases} i) x_1 = 2, x_2 = 1 x_3 = \frac{1}{2} \\ ii) x_1 = 2, x_2 = -1 x_3 = -\frac{1}{2} \\ iii) x_1 = -2, x_2 = 1 x_3 = -\frac{1}{2} \\ iv) x_1 = -2, x_2 = -1 x_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \to f = 4 + 4 + \frac{16}{4} = 12$$

então

$$\begin{cases} i) M : (\frac{1}{2}, 1, 2) \to y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 0 \to y_1 = -2y_2 - 4y_3 = -(2y_2 + 4y_3) \\ ii) M : (\frac{1}{2}, -1, -2) \to y_1 - 2y_2 - 4y_3 = 0 \\ iii) M : (-\frac{1}{2}, 1, -2) \to -y_1 + 2y_2 - 4y_3 = 0 \\ iv) M : (-\frac{1}{2}, -1, 2) \to -y_1 - 2y_2 + 4y_3 = 0 \end{cases}$$

Caso i) (os outros são similares)

$$F+\lambda H=\begin{bmatrix}2&-4&-8\\-4&8&-16\\-8&-16&32\end{bmatrix}\,det(.)=-256$$

$$\begin{bmatrix}2y_2-4y_3 & y_2 & y_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-8\\-4&-8&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2y_2-4y_3\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=2(2y_2+4y_3)^2+8y_2^2+32y_3^2>0$$

$$\text{para }\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\in M,\ \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\neq 0$$

Exercício 13 Resolva o seguinte problema de programação quadrática:

$$\min \frac{1}{2}x'Qx+b'x$$

$$Q=\begin{bmatrix}3&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix},b=-\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

e obtenha os pontos de mínimo local(global) para cada restrição abaixo:

1. $x_1+2x_2+x_3=4$
2. $x_1+2x_2+x_3\geq 4$

Resposta Caso 1.

$$\nabla f(x)=Qx+b$$

$$\nabla h(x)=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$Qx+b+\lambda_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=0$$

Logo,

$$\begin{bmatrix}3&-1&0&1\\-1&2&-1&2\\0&-1&1&1\\1&2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\4\end{bmatrix}$$

então

$$x_1=0.5,x_2=1,x_3=15,\lambda=0.5$$

$$\frac{3}{2}-1+\frac{1}{2}=1$$

$$-1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$\frac{1}{2}+2+\frac{3}{2}=4$$

Caso 2.

$$
\begin{aligned}
Qx - b - u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} &= 0 \\
u_1(4 - (x_1 + 2x_2 + x_3)) &= 0
\end{aligned}
$$

Caso 2.1.

$u_1 > 0 \rightarrow x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 15, u_1 = -0.5$

Caso 2.2.

$u_1 = 0 \rightarrow Qx = b \rightarrow Q^{-1}x = b \rightarrow x = Q^{-1}b$

$$
x = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3.5 \\ 4.5 \end{bmatrix} \rightarrow \text{solução otima}
$$

onde

$$
x_1 + x_2 + x_3 = 13 \geq 4
$$

Exercício 14 Resolva o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
&\max 14x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2 + 7 \\
&\quad \text{s.s.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Resposta Fazendo,

$$
\begin{cases} f(x_1, x_2) = -14x_1 + x_1^2 - 6x_2 + x_2^2 - 7 \\ g_1(x, 1x_2) = x_1 + x_2 - 2 \\ x_1 2x_2 - 3 \end{cases}
$$

$$
\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -14 + 2x_1 \\ -6 + 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

Com isso podemos escrever

$$
\begin{cases} \begin{bmatrix} -14 + 2x_1 \\ -6 + 2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u_2 = 0 \\ (x_1 + x_2 - 2)u_1 = 0 \\ (x_1 + 2x_2 - 3)u_2 = 0 \end{cases}
$$

Letra a: $u_1 > 0$, $u_2 > 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + u_1 + u_2 = 14 \\ 2x_2 + u_1 + 2u_2 = 6 \end{cases} \to \begin{cases} u_1 + u_2 = 12 \\ u_1 + 2u_2 = 4 \end{cases} \to \begin{cases} u_2 = -8 \\ u_1 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \to \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Letra b:
$u_1 > 0,\ u_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + u_1 = 14 \\ 2x_2 + u_1 = 6 \end{cases} \quad 2x_1 - 2x_2 = 8 \to x_1 - x_2 = 4$$

$$x_1 + x_2 = 2 \to x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = -1$$

$$\to u_1 = 14 - 2x_1 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 = 3 - 2 = 1 < 3 \text{ candidato}$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = -1,\ u_1 = 8,\ u_2 = 0$$

Letra c:

$$u_1 = 0, u_2 > 0,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + u_2 = 14 \\ 2x_2 + 2u_2 = 6 \end{cases} \to 4x_1 - 2x_2 = 22$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_1 = 5, x_2 = -1, u_2 = 4$$

$$x_1 + x_2 = 5 - 1 = 4 > 2 \text{ não serve}$$

Letra d: $u_1 = 0,\ u_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 = 14 \\ 2x_2 = 6 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = 7 + 3 = 10 > 2 \text{ não serve}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, g_1 = 0, g_2 = 0$$

$$L = F > 0 \to \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases} \quad \text{é mínimo local}$$

Exercício 15 Resolva o seguinte problema:

$$\min x_2 + x_3$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

Resposta

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla h_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \nabla h_2(x) = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Para o caso de 1ª ordem

$$\begin{cases} 0 + \lambda_1 + 2x_1\lambda_2 = 0 \to -\lambda_1 = 2x_1\lambda_2 \\ 1 + \lambda_1 + 2x_2\lambda_2 = 0 \\ 1 + \lambda_1 + 2x_3\lambda_2 = 0 \to (x_2 - x_3)\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_2 \neq 0$ pois caso contrario teríamos $(\lambda_2 = 0)$. Logo, $x_2 = x_3$ e

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 x_1^2 + 2x_2^2 = 1 \end{cases} \quad \to \begin{cases} (1 - 2x_2)^2 + 2x_2^2 \to 2x_2(3x_2 - 2) = 0 \end{cases}$$

Letra a

$$x_2 = x_3 = 0, x_1 = 1, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$
$$x_a^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1/2$$

Letra b

$$x_2 = x_3 = \frac{2}{3}, x_1 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$
$$\lambda_1 = -2x_2\lambda_2 - 1 = -\frac{4}{3}\lambda_2 - 1$$
$$\lambda_1 = -2x_1\lambda_2 = \frac{2}{3}\lambda_2$$
$$\to \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_1 = -\frac{1}{3}$$
$$x_b^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \lambda_1 = -1/3, \lambda_2 = -1/2$$

2ª Ordem:

$$\nabla^2 f(x) = 0, \nabla^2 h_1(x) = 0, \nabla h_2(x) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para a) : $L = \frac{1}{2}2I = I > 0 \rightarrow x_a$ é mínimo local.(global pois o conjunto de factibilidade é compacto)

$$x_a^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é mínimo global.

Para b): $L = -\frac{1}{2}2I = -I < 0 \rightarrow x_b$ é máximo local(global), $\lambda_2 = -1/2$

$$x_b^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

é máximo global.

Exercício 16 Resolva o seguinte problema:

$$\min x_1^2 + x_2^2 x_1 x_2 - 3x_1$$
$$\text{S.A.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$$

Resposta Fazendo

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3x_1$$
$$g_1(x_1, x_2) = 1 - (x_1 + 2x_2)$$
$$g_2(x_1, x_2) = 1 - (2x_1 + x_2)$$
$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 - u_1 - 2u_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2u_1 - u_2 = 0 \end{cases}$$

Caso 1) $u_1 = 0$, $u_2 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$ são serve.
Caso 2) $u_1 > 0$, $u_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - u_1 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 2u_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2x_1 + x_2 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} > 10$$
$$u_1 = 2x_1 + x_2 - 3 = \frac{1}{2} > 0 \text{ Ok}$$

Caso 3) $u_1 = 0$, $u_2 > 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2u_2 - 3 \\ x_1 + 2x_2 - u_2 = 0 \qquad \to x_1 = 1, x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 + 2x_2 = 1 - 2 = -1 \to \text{não serve}$$

Exercício 17 Resolva o seguinte problema:

$$\min x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1$$
$$\text{S.A.} \left\{ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right.$$

Resposta

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1$$
$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \geq 1$$
$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 3 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Kuhn tucker:

$$2x_1 + x_2 + 2x_1u = 3$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_2u = 0$$
$$u(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, u \geq 0$$

$i)$ $u = 0 \to x_1 = 2, x_2 = -1$ não serve.
$ii)$ $u > 0 \to x_1^2 x_2^2 = 1$

$$2x_1(1 + u) + x_2 = 3 \to -4x_2z^2 + x_2 = 3$$
$$x_1 + 2x_2(1 + u) = 0 \to x_1 = -2x_2z$$
$$x_2(1 - 4z^2) = 3 \to x_2 = \frac{3}{(1 - 2z)(1 + 2z)}$$
$$x_2 = \frac{3}{(1 - 2z)(1 + 2z)}, x_1 = \frac{-6z}{(1 - 2z)(1 + 2z)}$$
$$9 + 36z^2 = (1 - 2z)^2(1 + 2z)^2 = (1 - 4z^2)^2 = 1 - 8z^2 + 16z^4$$
$$16z^4 - 8z^2 - 36z^2 + 1 - 9 = 0 \to l = z^2$$
$$l = \frac{11 \pm \sqrt{153}}{8} \to z^2 = 2,92 \to z = 1.17 \to 0.71$$
$$x_1 = 0.96 \ x_2 = 0.28$$
$$L = F + Hu = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 0.71 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.42 & 1 \\ 1 & 3.42 \end{bmatrix}, det(L) = 3.42^2 - 1 > 0,$$
$$ti(L) = 2 \times 3.42 > 0$$
$$L > 0 \to \begin{cases} x_1^* = 0.96 \\ x_2^* = 0.28 \end{cases} \quad \text{é mínimo local(global)}$$

Portanto,

$$f(x_1^*, x_2^*) = 1 + 0.96 \times 0.28 - 3 \times 0.96 = -1.6656$$

Exercício 18 Resolva o seguinte problema:

$$\min x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} x_1 x_2 \leq -1 \end{cases}$$

Resposta

$$g(x) = x_1 x_2 + 1,\ \nabla g(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix},\ \nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, det(F) = 3 > 0$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ u(x_1 x_2 + 1) = 0 \end{cases}$$

$i)\ u = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0 \text{ não serve!}$$

$ii)\ u > 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_2 u = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_1 u = 0 \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x_1^2 - x_1 x_2 - u &= 0 \\ -x_1 x_2 + 2x_2^2 - u &= 0 \\ 2x_1^2 + 2x_2^2 = 0 \rightarrow x_1^2 = x_2^2 \rightarrow x_1^4 &= 1 \\ x_1 &= \pm 1 \\ x_2 &= \pm 1 \end{aligned}$$

Letra a)

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2 + 1 - u = 0 \rightarrow u = 3 \\ -1 - 2 + u = 0 \end{cases}$$

Letra b)

$$x_1 = -1$$
$$x_2 = 1 \to$$
$$\begin{cases} -2 - 1 + u = 0 \to u = 3 \\ 1 + 2 - u = 0 \end{cases}$$

2ª Ordem:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$M((1.1)) = M((-1,1)) = [y \in R^2; y_1 = y_2]$$
$$2 \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2y_1 \\ 2y_1 \end{bmatrix} = 8y_1^2 > 0$$

para $y \neq 0$ em $M((1,1)) = M((-1,1))$. Logo, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são mínimos locais.

Exercício 19 Resolva o seguinte problema:

$$\min (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$$
$$\text{S.A.} \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resposta

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 3) \\ 2(x_2 - 2) \end{bmatrix}, \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_1 u_1 + u_2 = 6 \\ 2x_2 + 2x_2 u_1 + u_2 = 4 \\ u_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0 \\ u_2(x_1 + x_2 - 3) = 0 \end{cases}$$

$i) u_1 = 0, u_2 = 0 \to x_1 = 3, x_2 = 2 \to x_1^2 + x_2^2 = 11 > 5.$
$ii) u_1 = 0, u_2 = 0 \to$

$$\begin{cases} 2x_1(1 + u_1) = 6 \to x_1 = \frac{3}{(1+u_1+1)} \\ 2x_2(1 + u_1) = 4 \to x_2 = \frac{3}{(1+u_1+1)} \\ x_1^2 + x_2^2 = 5 \to \frac{11}{(1+u_1)^2} = 5 \\ (1 + u_1)^2 = \frac{11}{5} \to u_1 = -1 + \sqrt{\frac{11}{5}} \to \\ x_1 = 3\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}, x_2 = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{11}} \end{cases} \qquad x_1 + x_2 = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{11}} = 3.37 > 3 \quad \text{não serve}$$

$iii)$ $u_1 = 0$, $u_2 > 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + u_2 = 6 \\ 2x_2 + u_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \rightarrow 2(x_1 - x_2) = 2 \rightarrow x_1 - x_2 = 1$$

$$x_1 = 2, x_2 = 1$$

$iv)$ $u_1 > 0$, $u_2 > 0$

$$2x_1(1 + u_1) + u_2 = 6$$
$$2x_2(1 + u_1) + u_2 = 4$$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1, u_1 = 0$$

2 ª Ordem :

$$L = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0$$

OK

Exercício 20 Considere 2 ativos com retornos R_1 e R_2 é fator de correlação, medias, e desvios padrão dados por

$$\rho = -0.5, r_1 = 14\%, \sigma_1 = 10\%, \sigma_2 = 20\%$$

Considere também um ativo livre de risco com retorno $r_f = 10\%$. Considere um portfolio com retorno $P = \omega_0 r_f + \omega_2 R_2, \omega_0, \omega_1 + \omega_2 = 1$. Quanto deve ser alocado nos ativos livre de risco, ativo 1 e no ativo 2 de forma a se ter uma carteira de mínima variância e retorno esperado $\mu = 20\%$? Qual é o risco dessa carteira e como ele se compara com o ativo 2 individualmente?

Resposta:

$$\min 0.01w_1^2 + 0.04w_2^2 - 2 \times 0.5 \times 0.1 \times 0.2w_1w_2 \text{s.a.} 0.1(1 - w_1 - w_2) + 0.14w_1 + 0.2w_2 = 0.2$$

$$f(w_1, w_2) = 0.01[w_1^2 + 4w_2^2 - 2w_1w_2]$$

$$0.1 - 0.1(w_1 + w_2) + 0.14w_1 + 0.2w_2 = 0.2$$

$$0.04w_1 + 0.1w_2 = 0.1 \to 4w_1 + 10w_2 = 10$$

$$h(w_1, w_2) = 10 - 4w_1 - 10w_2$$

$$\min 0.01(w_1^2 + 4w_2^2 - 2w_1w_2)$$

$$\text{s.a.} 4w_1 + 10w_2 = 20$$

$$\nabla f(w_1, w_2) = 0.01 \begin{bmatrix} 2w_1 & -2w_2 \\ -2w_1 + 8w_2 & \end{bmatrix}$$

$$\nabla(w_1, w_2) = - \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.01(2w_1 - 2w_2) - 4\lambda = 0 \\ 0.01(-2w_1 + 8w_2) - 10\lambda = 0 \\ 4w_1 + 10w_2 = 10 \end{cases}$$

$$w_1 = \frac{13}{7} w_2$$

$$4(\frac{13}{7} w_2) + 10w_2 = 10 \to w_2 = \frac{70}{122}, w_1 \frac{65}{61}$$

Em renda fixa:

$$1 - \frac{100}{61} = -63,92\%$$

Em R_1: $\frac{65}{61} \cong 6.56\%$.
Em R_2 : $\frac{35}{61} \cong 57.38\%$.
Risco da carteira:

$$\sigma^2 = 0.01(w_1^2 + 4w_2^2 - 2w_1w_2)$$

$$= 0.01(\frac{65^2 + 4.35^2 - 2.65.35}{61^2} = 0.012295$$

$$\sigma = 11.09\%(< 20\% \text{ do ativo } r_2)$$

2ª Ordem:

$$\nabla^2 f(x) = 0.001 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, \nabla^2 h(x) = 0, \ tra(\nabla^2 f(x)) = 0.01(2 + 8) = 0.1 > 0$$

$$det(\nabla^2 f(x)) = (0.01)^2(16 - 4) = 0.01^2 \times 12 > 0$$

Logo, $\nabla^2 f(x) > 0$. A solução encontrado é mínimo local (global pois $f(x)$ é conversa e o conjunto restrição é convexo.)

Exercício 21

$$\Psi_u^k + \lambda(k)\phi_u^k = 0, \;\; k = 0. \ldots, T,$$
$$\lambda(k-1) = \lambda(k)\phi_x^k + \Psi_x^k, \;\; k = 1, \ldots, T,$$
$$\lambda(T) = \lambda(T+1)G_x,$$
$$\Psi(x,u,k) = \frac{1}{2(k+1)^2}u^2, \;\; \phi(x,u,k) = x + u - d(k), \;\; G(x) = x$$
$$\Psi_u^k = \frac{u}{(k+1)^2}, \;\; \Psi_x^k = 0, \;\; \phi_u^k = 1, \;\; \phi_x^k = 1, \;\; G_x = 1,$$
$$\frac{u(k)}{(k+1)^2} + \lambda(k) = 0, \;\; k = 0, \ldots, T, \lambda(k-1) = \lambda(k), \;\; k = 1, \ldots, T, \lambda(T) = \lambda(T = 1) = c_0$$
$$\Longrightarrow \lambda(k) = c_0, \;\; k = 0, \ldots, T \Longrightarrow \frac{u(k)}{(k+1)^2} = -c_0 \Longrightarrow u(k) = -c_0(k+1)^2, \;\; k = 0, \ldots, T$$
$$x() = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1}(u(j) - d(j)) \Longrightarrow 0 = x(T+1) = x_0 + \sum_{j=0}^{T} u(j) - D \Longrightarrow$$
$$-c_0\sum_{j=0}^{T}(j+1)^2 = D - x_0, \;\; \sum_{j=0}^{T}(j+1)^2 = \frac{(T+1)(T+2)(T+3)}{6} \Longrightarrow$$
$$-c_0 = \frac{6(D-x_0)}{(T+1)(T+2)(2T+3)}, \;\; u^*(k) = \frac{6(D-x_0)}{(T+1)(T+2)(2T+3)}(k+1)^2,$$
$$J(u^*) = \frac{3(D-x_0)^2}{(T+1)(T+2)(2T+3)},$$
$$\text{Para } T = 2, u^*(0) = \frac{D-x_0}{14}, \;\; u^*(1) = \frac{2}{7}(D-x_0), \;\; u^*(2) = \frac{9}{14}(D-x_0), \;\; J(u^*) = \frac{(D-x_0)^2}{28}.$$

——— *BOA SORTE :D* ———