MAT0315 - Introdução à Análise

Segundo Semestre de 2020
Período Diurno

Martha S. Monteiro

IME-USP

Aula 24 (03/12/2020)

Séries de Potências

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

em que a e os coeficientes c_n são constantes e x é uma variável. No caso especial em que $a = 0$, a série tem uma expressão mais simples:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

No conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ é convergente $\}$ fica definida uma função:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \forall x \in D$$

Raio de Convergência de uma série de potências

Teorema 1

Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

1. A série converge somente para $x = a$.
2. A série é absolutamente convergente para todo x.
3. Existe um número real $R > 0$ tal que a série é absolutamente convergente para $|x-a| < R$ e divergente para $|x-a| > R$.

O número R é chamado raio de convergência da série de potências.

Nenhuma afirmação geral pode ser feita a respeito das extremidades do intervalo $]a-R, a+R[$. Essas devem ser testadas separadamente.

O conjunto dos x para os quais uma série de potências converge é chamado intervalo de convergência.

Derivação e integração de séries de potências

Teorema 2

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, para $|x-a| < R$. Temos:

(a) A função f é contínua no intervalo aberto $]a-R, a+R[$.

(b) A função f é derivável em $]a-R, a+R[$ e sua derivada é dada por

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

(c) A função f é integrável e

$$\int f(x)dx = K + \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n dx$$

para algum K.
As séries em (b) e (c) têm raio de convergência igual a R.

Exemplo 1

Expansão em série de potências de $\ln(1+x)$

Nosso ponto de partida é que a derivada de $\ln(1+x)$ é $\dfrac{1}{1+x}$. Para $|x| < 1$ vale:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

Usando o teorema 2, podemos concluir que

$$\ln(1+x) = K + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

Fazendo $x = 0$ obtemos $K = \ln 1 = 0$. Portanto,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \ \ \forall x \in]-1, 1[$$

Exemplo 2

Expansão em série de potências de $\operatorname{arctg} x$

Sabemos que $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. Para $|x| < 1$, vale a expansão

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

Pelo Teorema 2, temos:

$$\operatorname{arctg} x = K + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Fazendo $x = 0$ obtemos $K = \operatorname{arctg} 0 = 0$. Portanto,

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \ \forall x \in]-1, 1[$$

Séries de Taylor

<u>Já vimos</u>: dentro do intervalo de convergência, uma série de potências define uma função contínua, com derivadas de todas as ordens.
<u>Problema inverso</u>: dada uma função infinitamente derivável, como escrevê-la na forma de uma série de potências?

Suponha que, para $|x-a|<R$,
$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots$ Temos:

- $f(a) = c_0$
- Pelo Teorema 2, podemos derivar f e vale:
  $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + 5c_5(x-a)^4 + \cdots$
  Para $x = a$: $f'(a) = c_1$
- Derivando novamente:
  $f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + 4\cdot 3c_4(x-a)^2 + 5\cdot 4c_5(x-a)^3 + \cdots$
  Para $x = a$: $c_2 = \dfrac{f''(a)}{2}$
- E assim por diante!

Coeficientes de uma série de potências

Teorema 3

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ para $|x-a| < R$ então os coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Uma outra forma de dizer é:

Se f tem uma expansão em séries de potências em a então

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Série de Taylor de $f(x) = e^x$

Sabemos que para $f(x) = e^x$, todas as derivadas de f são iguais, isto é, $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo n. Para $x = 0$, temos $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$.
Portanto, a série de Taylor de f em 0 é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Raio de convergência: tomando $a_n = \left|\frac{x^n}{n!}\right|$, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{n+1} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

Pelo critério da razão, a série converge, qualquer que seja x. $(R = \infty)$

Conclusão

Para todo $x \in \mathbb{R}$ vale:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ainda a função $f(x) = e^x$

Para $x = 1$ obtemos:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Exercício: Encontre a série de Taylor de e^x em torno de $a = 2$.

Série de Taylor de $f(x) = \text{sen}\, x$ em torno de 0

$$f(x) = \text{sen}\, x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\text{sen}\, x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \text{sen}\, x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

e as derivadas subsequentes seguem o mesmo padrão. Portanto, a expansão da série fica

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Para provarmos que o raio de convergência é $R = \infty$, precisamos usar a estimativa do resto de Lagrange para polinômios de Taylor.

Série de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em torno de 0 - continuação

Recordando a fórmula do Polinômio de Taylor:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

sendo $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$ para algum c entre 0 e x.

No caso da função seno, qualquer que seja n tem-se $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$ e, portanto, $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$, qualquer que seja x.
Assim,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercícios importantes

1. Encontre a série de Taylor em torno de 0 da função cosseno. Determine o raio de convergência.

Resposta:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

para todo $x \in \mathbb{R}$

Exercícios importantes

2. Encontre a série de Taylor em torno de 0 da função $f(x) = (1+x)^k$, sendo k um número real qualquer. Determine o raio de convergência.

Resposta:

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$

O raio de convergência é 1.

Notação: $\binom{k}{n} = \dfrac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}$

3. Encontre a série de Taylor em torno de 0 da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ e o raio de convergência.