MAT0234 - Medida e Integração -

IME - segundo semestre 2020

Lista Teorema de Fubini

1. Sejam $f : (X, \mathcal{X}, \mu) \to \mathbb{R}$; $g : (Y, \mathcal{Y}, \nu) \to \mathbb{R}$ mensuráveis. Então a função $h(x, y) \to \mathbb{R}$ definida em $(X \times Y, \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ *por* $h(x, y) = f(x)g(y)$ é mensurável.

2. para f, g, h como no exercício anterior, f, g integráveis. Se π for a medida produto de μ *e* ν, mostre que h é integrável e $\int_{X\times Y} h\, d\pi = [\int_X f\, d\mu]\, [\int_Y g\, d\nu]$.

3. Seja $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ com a medida de contagem. Seja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Seja $f(m, n) = a_{m,n}$. Então o Teorema de Tonelli neste caso significa que $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \leq \infty$.

4. Seja $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ com a medida de contagem. Seja $f(m, n) = a_{m,n}$ com $a_{n,n} = 1$, $a_{n,n+1} = -1$ e zero para todo outro par de índices. Mostre que as ”integrais iteradas”são diferentes. Por quê?

5. Analise o que acontece com $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = \dfrac{x - y}{(x + y)^3}$.

6. Mostre que a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ é invariante por rotações.