MAE224 - Probabilidade II
RESOLUCÃO - LISTA 13/14 - ADENDO
Prof. Vanderlei C. Bueno

1. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição

$$F(x) = e^{\lambda . x}, \quad x \leq 0 \quad \alpha > 0.$$

Verifique se F tem densidade do tipo exponencial nas vizinhanças de $-\infty$.

Solução:

F é do tipo exponencial em um ponto $\xi_{0;n}$ com $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$ se F é continuamente diferenciável e

$$\frac{f(x)}{F(x)} \approx \frac{f^{'}(x)}{f(x)} \approx \frac{f^{''}(x)}{f^{'}(x)} \approx ....$$

quando $x \to -\infty$.

Note que $f(x) = \lambda e^{\lambda . x}$; e
$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\lambda e^{\lambda . x}}{e^{\lambda . x}} = \lambda$;
$f^{'}(x) = \lambda^2 e^{\lambda . x}$; e
$\frac{f^{'}(x)}{f(x)} = \frac{\lambda^2 e^{\lambda . x}}{\lambda e^{\lambda . x}} = \lambda$;
$f^{''}(x) = \lambda^3 e^{\lambda . x}$; e
$\frac{f^{''}(x)}{f^{'}(x)} = \frac{\lambda^3 e^{\lambda . x}}{\lambda^2 e^{\lambda . x}} = \lambda$.

Que são iguais a λ nas vizinhanças de $-\infty$.
Pelo Teorema 2 da aula 14 temos que

$$P(\frac{X_{(n;1)} - \xi_{0;n}}{a_n} \leq x) \to^{D} 1 - e^{-e^{x}}, \quad -\infty < x < \infty;$$

onde $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$ e $a_n = \frac{1}{n.f(\xi_{0;n})}$.

Portanto $\xi_{0;n}$ é determinado por

$$e^{\lambda . \xi_{0;n}} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \lambda . \xi_{0;n} = -\ln(n) \Leftrightarrow \xi_{0;n} = \frac{-\ln(n)}{\lambda}.$$

$$f(\xi_{0;n}) = \lambda e^{\lambda(\frac{-\ln(n)}{\lambda})} = \lambda e^{[} - \ln(n) = \frac{\lambda}{n}.$$

Concluímos

$$P((X_{(n;1)} + \frac{\ln(n)}{\lambda}).\lambda \leq x) \to^{D} 1 - e^{-e^{x}}, \quad -\infty < x < \infty;$$

e podemos....

2. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda . x}, \quad x \geq 0 \quad \alpha > 0.$$

Verifique se F tem densidade do tipo exponencial nas vizinhanças de $+\infty$.

(Aula 14)

F é do tipo exponencial em um ponto $\xi_{1;n}$ com $F(\xi_{1;n}) = 1 - \frac{1}{n}$ se F é continuamente diferenciável e

$$\frac{-f(x)}{\overline{F}(x)} \approx \frac{f^{'}(x)}{f(x)} \approx \frac{f^{''}(x)}{f^{'}(x)} \approx ....$$

quando $x \to \infty$.

Solução: Os resultados são iguais a $-\lambda$.

Pelo Corolário 2 da aula 14 temos que

$$P(\frac{X_{(n;n)} - \xi_{1;n}}{a_n} \leq x) \to^D e^{-e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty;$$

onde $F(\xi_{1;n}) = 1 - \frac{1}{n}$ e $a_n = \frac{1}{n.f(\xi_{1;n})}$.

Desenvolvendo as igualdades acima determinamos $\xi_{1;n} = \frac{\lambda}{n}$ e $a_n = \frac{1}{\lambda}$.

Temos

$$P((X_{(n;n)} - \xi_{1;n}).\lambda \leq x) \to^D e^{-e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty;$$

e podemos....

3. Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f(x) = c(x - \theta)^2, \quad \theta - 1 \leq x \leq \theta + 1, \quad c > 0.$$

(a) Prove que f tem um contato de ordem m no ponto $\xi_{0;n}$. Quais os valores de $\xi_{0;n}$ e m?

Na Aula 14 temos a definição

F tem um contato terminal de ordem m em um ponto $\xi_{0;n}$ com $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$ se $F(\xi_{0;n}) = 0$, as derivadas à esquerda $F^{(j)}(\xi_{0;n}) = 0, j = 1, ..., m$ e $F^{(m+1)}(\xi_{0;n}) \neq 0$.

Solução:

A função de distribuição de X é dada por $F(x) = 0, \quad x < \theta - 1$, $F(x) = 1 \quad x \geq \theta + 1$. Se $\theta - 1 \leq x < \theta + 1$ temos

$$F(x) = c\int_{\theta-1}^{x} (y - \theta)^2 dy = c\int_{-1}^{x-\theta} z^2 dz = \frac{c}{3}[(x - \theta)^3 + 1].$$

Como $F(\theta + 1) = 1$ temos $c = \frac{3}{2}$. Portanto

$$F(x) = \frac{1}{2}[(x - \theta)^3 + 1], \quad \theta - 1 \leq x < \theta + 1, \quad 0 c.c.$$

e $F(\theta - 1) = 0$, $\xi_0 = \theta - 1$

$$F^{'}(x) = \frac{3}{2}(x - \theta)^2; \quad F^{'}(\theta - 1) = \frac{3}{2}(\theta - 1 - \theta)^2 = \frac{3}{2} \neq 0$$

Temos $m = 0$

(b) Encontrar um intervalo de confiança para θ com coeficiente de 96% de confiança.

Na aula 14 , o Corolário do Teorema 3 :

Se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com função de distribuição F com contato terminal de ordem m no ponto $\xi_{0;n}$, Com $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$., então

$$P(\frac{X_{(n;1)} - \xi_{0;n}}{a_n} \leq t) \to^D 1 - e^{-(t)^{m+1}},$$

onde $a_n = [\frac{(-1)^{m+1}(m+1)!}{nF^{m+1}(\xi_0)}]^{\frac{1}{m+1}}$. **Solução:**

$$a_n = [\frac{(-1)^{m+1}(m+1)!}{nF^{m+1}(\xi_0)}]^{\frac{1}{m+1}} = [\frac{1!}{nF'(\theta-1)}]^1 = \frac{2}{3n}.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{3n}{2}(X_{(n;1)} - \theta + 1) \leq t) = 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Um limite superior para a distribuição padronizada é

$$P(T > t) = 0,02 \Leftrightarrow e^{-t} = 0,02 \Leftrightarrow t = -\ln(0,02).$$

Um limite inferior para a distribuição padronizada é

$$P(T \leq t) = 0,02 \Leftrightarrow e^{-t} = 0,98 \Leftrightarrow t = -\ln(0,98).$$

Concluimos:

$$P(-\ln(0,98) \leq \frac{3n}{2}(X_{(n;1)} - \theta + 1) \leq -\ln(0,02)) = 0,96 \Leftrightarrow$$

$$P(\frac{-2\ln(0,02)}{3n} \leq \theta - 1 - X_{(n;1)} \leq \frac{-2\ln(0,98)}{3n}) = 0.96 >$$

e

$$(\frac{-2\ln(0,02)}{3n} + 1 + x_{(n;1)}; \frac{-2\ln(0,98)}{3n} + 1 + x_{(n;1)})$$

' e o intervalo de confiança para θ.

4. Se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com função de densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}, -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty.$$

(a) Prove que a função de distribuição F é do tipo Cauchy nas vizinhanças de ∞.

Solução:

Da aula 14 temos que a distribuição F é do tipo Cauchy na vizinhança de ∞

$$\lim_{x\to\infty} |x|^k \overline{F}(x) = c.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \pi^{-1}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+(y-\theta)^2}dy}{\frac{1}{|x|}} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+(x-\theta)^2}}{\frac{-1}{|x|^2}} = \frac{-1}{\pi}.$$

desta maneira $k = 1$.

O Corolário 1 da aula 14:

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição F do tipo Cauchy. Então

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;n)}}{\xi_{1;n}} \leq t) = e^{(-t)^{-k}}, \quad t \geq 0,$$

onde $\xi_{1;n}$ é tal que $F(\xi_{1;n}) = 1 - \frac{1}{n}$.

Resolvendo $F(\xi_{1;n}) = 1 - \frac{1}{n}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \frac{1}{\pi}\arctan(x-\theta) \Leftrightarrow \arctan(\xi_{1;n} - \theta) = 1 - \frac{1}{n} \Leftrightarrow$$

$$\xi_{1;n} - \theta = \tan(1 - \frac{1}{n}) \Leftrightarrow \xi_{1;n} = \tan(1 - \frac{1}{n}) + \theta.$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;n)}}{\tan(1-\frac{1}{n}) + \theta} \leq t) = e^{(-t)^{-1}}, \quad t \geq 0,$$

(c) Observamos que o tempo de duração de um circuito em paralelo com 100 componentes é de 80 unidades . Teste, a nível de 5% de significância. a hipótese

$$H_0 : \theta = 30 \quad X \quad H_a : \theta > 30.$$

utilizando o nível descritiva.

Solução:

O nível descritivo α^* é

$$\alpha^* = P(X_{(n;n)} > 80|H_0) = P(\frac{X_{(n;n)}}{\tan(0,99) + 30} > \frac{80}{30,0173}) = P(\frac{X_{(n;n)}}{\tan(0,99) + 30} > 2,665) = 1 - e^{-(\frac{1}{2,665})} = 1 - 0,69 = 0,31.$$

Como $\alpha^* > \alpha$ aceitamos H_0.