Resolução - Exercícios - Cálculo IV - Aula 14 - Semana 23/11 – 27/11 (Atual: 01/12)

Considere $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \doteq \begin{cases} -x, & -2 \le x \le 0 \\ x-1, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

Na lista, calculou-se a série de Fourier de f :

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right)$$

onde $a_0 = 1$ e

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{8}{n^2\pi^2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{2}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\textit{Logo}, s(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) - \frac{2}{\pi(2n-1)} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\right)$$

Lembre ainda que sendo f descontínua na origem o valor da série de Fourier $s(0) = \dfrac{\lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^-} f(x)}{2} = \dfrac{0-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$. Aplicando na série de Fourier acima obtemos

$-\dfrac{1}{2} = s(0) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$. Isso fornece $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

Exercício 1. *Aplique a identidade de Parseval na série acima para encontrar o valor da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$

Solução. Aplicando a identidade de Parseval na série de Fourier da funçào f, obtemos:

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)^2 dx = \frac{1^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Em que

$$a_0 = 1,\ a_n = -\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2},\ b_n = -\frac{2}{\pi(2n-1)}.$$

Com isso obtemos:

$$\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} (-x)^2 dx + \int_{0}^{2} (x-1)^2 dx\right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\pi(2n-1)}\right)^2\right]$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{2} - x^2\Big|_{0}^{2} + x\Big|_{0}^{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{64}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} + \frac{4}{\pi^2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}}_{(I)}$$

Lembrando que (I) é igual a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Então, temos:

$$\frac{1}{2}.\frac{10}{3} - \frac{1}{2} = \frac{64}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} + \frac{1}{2}$$

Podemos concluir que

$$\frac{64}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{10}{6} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

□

Exercício 2. *Utilizando a série acima encontre o valor de convergência da série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Solução. Tomando $x = 1$ veja que $\cos\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e obtemos:

$$0 = s(1) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} (-1)^{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

□

Exercício 3. *Encontre os polinômios de Fourier de f de ordem 2 e 3. Em seguida utilize algum software para fazer os gráficos de $F_2(x)$ e $F_3(x)$ e compare com o gráfico inicial de f.*

Solução. Realizando os somatórios da série de Fourier, mas apenas para k termos, temos o polinômio de Fourier de ordem $2k-1$.

$$F_{2k-1}(x) = \frac{1}{2} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

Nessa situação, para $k = 1$ temos o polinômio de ordem 1 e para $k = 2$ o polinômio de ordem 3 e assim sucessivamente. Na série não existem termos para $\cos(\pi m x/2)$ ou $\sin(\pi m x/2)$ com m par, então os polinômios de ordem par são iguais ao polinômio do número ímpar anterior.

Podemos gerar o gráfico através do *WolframAlpha*, para o qual é interessante simplificar essa expressão para ter um único somatório

$$F_k(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) + \frac{1}{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\right)$$

Com isso podemos fazer os gráficos simplesmente escrevendo a expressão (sem as quebras de linha):

```
plot
1/2 +
(
sum from n=1 to <k> of
-2/pi*
(
4/pi*1/(2n-1)^2*cos(((2n-1)*pi*x)/2) +
1/(2n-1)*sin(((2n-1)*pi*x)/2)
)
)
from -2 to 2
```

Substituindo `<k>` pelo valor correspondente ao grau desejado. Para o polinômio de Fourrier de ordem 2 usamos $k = 1$ e para o de ordem 3, $k = 2$. Com isso temos os seguintes plots:

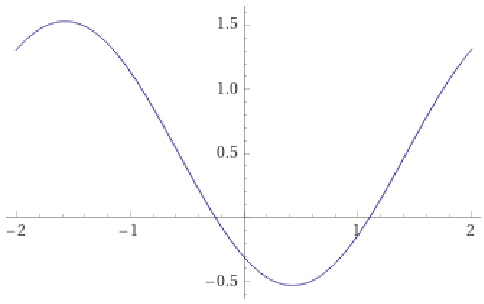

Figura 1: Polinômio de ordem 2

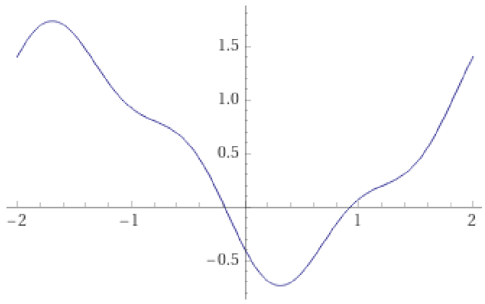

Figura 2: Polinômio de ordem 3

Para a função original podemos usar a entrada

```
plot piecewise [{{-x, -2<=x<0},{x-1, 0<x<=2}}] from -2 to 2
```

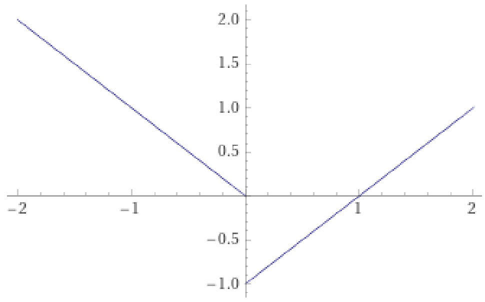

Figura 3: função original

$\square$

Exercício 4. *Considere a função*

$$f(x) \doteq \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Encontre :

i) A série de Fourier de f.

ii) O valor da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

iii) O valor da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Solução. Vamos usar valores obtidos pelo professor no primeiro item e aplicar os resultados nos itens subsequentes.

i) Considere $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $g(x) \doteq \sin x$. O professor Possani calculou, na [aula 15 ↗] :
Note que $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)dx = \dfrac{2}{\pi}$, $a_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)dx = 0$, em geral usando a fórmula $2\sin(x)cos(nx) = \sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)$ você mostra que para $n \neq 1$,

$$a_n = \begin{cases} 0, \text{n ímpar} \\ -\dfrac{2}{\pi(n^2-1)}, \text{n par} \end{cases}$$

De forma análoga mostramos que $\begin{cases} b_1 & = \frac{1}{2} \\ b_n & = 0, n > 1 \end{cases}$

Portanto, a série de Fourier de f fica:

$$s(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} + \frac{1}{2}\sin(x).$$

ii) Como

$$s(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2nx)}{4n^2-1} + \frac{1}{2}\sin(x)$$

. Pela convergência da série de Fourier, temos que:

$$\begin{aligned} 0 = s(0) &= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(0)}{4n^2-1} \\ \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{\pi} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

iii) Novamente vamos aplicar a igualdade de Parseval na série $s(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} + \frac{1}{2}\sin(x)$.

em que os coeficientes são
$a_0 = \frac{2}{\pi}$, $a_n = -\frac{2}{\pi(4n^2-1)}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, e para $n > 1$, $b_n = 0$. Lembre que a identidade é:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

- Calculemos $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{4}\right]\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Usando agora a igualdade de Parseval, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \\ \frac{1}{2} &= \frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(4n^2-1)^2} \\ \frac{\pi^2-8}{16} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} \end{aligned}$$

□

Exercício 5. *Encontre a série de cossenos da função $f(x) = 2x$, $x \in [0, 3]$.*

Solução. Inicialmente, vejamos que sua extensão par é dada por $g(x) = |2x|$, $x \in [-3, 3]$. Como essa função é par, temos que b_n são todos nulos. Além disso, temos:

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 2x dx = \frac{2}{3}(3^2 - 0^2) = 6$$

E,

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 2x\cos\left(\frac{n\pi x}{3}dx\right) = \frac{4}{3}\int_0^3 x\cos\left(\frac{n\pi x}{3}dx\right).$$

Por partes obtemos que:

$$\boxed{\int x\cos\left(\frac{n\pi x}{3}dx\right) = \frac{3x}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) + \frac{9}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) + C}$$

Assim,

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{24}{n^2\pi^2}, \text{n ímpar} \\ 0, \text{n par.} \end{cases}$$

Portanto, temos a série de cossenos para $f(x) = 2x$, para $x \in [0,3]$ é dada por:

$$s(x) = 3 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{24}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{3}\right)$$

□

Exercício 6. *Encontre os coeficientes a_1, a_2, a_3 tal que a integral abaixo tenha o menor valor possível.*

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - a_1\sin(x) - a_2\sin(2x) - a_3\sin(3x))^2 dx$$

Solução. Como comentado [neste] no final da Aula 15 de Possani, os coeficientes que minimizam a integral acima são exatamente os coeficientes da série de Fourier da função $f(x) = x^2$ em $[-\pi,\pi]$. Note, entretanto, que a função $f(x) = x^2$ é par em $[-\pi,\pi]$, e portanto, os coeficientes $b_n, n \geq 1$, dos senos na série de Fourier são todos nulos. Portanto, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Outra solução um pouco mais geométrica: Lembre que o espaço vetorial das função definidas no intervalo $[-\pi,\pi]$ pode ser decomposto como soma direta do subespaço das funções pares, com o subespaço das funções ímpares. Além disso, na série de Fourier os cossenos geram a parte par da função, enquanto os senos a parte ímpar. Observe também que, do ponto de vista da álgebra linear a diferença no integrando

$$x^2 - a_1\sin(x) - a_2\sin(2x) - a_3\sin(3x)$$

representa a projeção do vetor $f(x) = x^2$ na direção do subespaço gerado por $\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)\}$, que por sua vez é um subespaço vetorial no espaço das funções ímpares.

Sendo $f(x) = x^2$ uma função par em $[-\pi,\pi]$, sua projeção no subespaço das funções ímpares tem que ser nula! Dai concluímos que os coeficientes $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

□