Aula 23 30/11/2020

Funções representadas por Séries de Potências.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

f está definida no conjunto dos x para os quais a série converge.

Exemplo 1. Série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

converge se $|x| < 1$

$\Rightarrow$ define uma função.

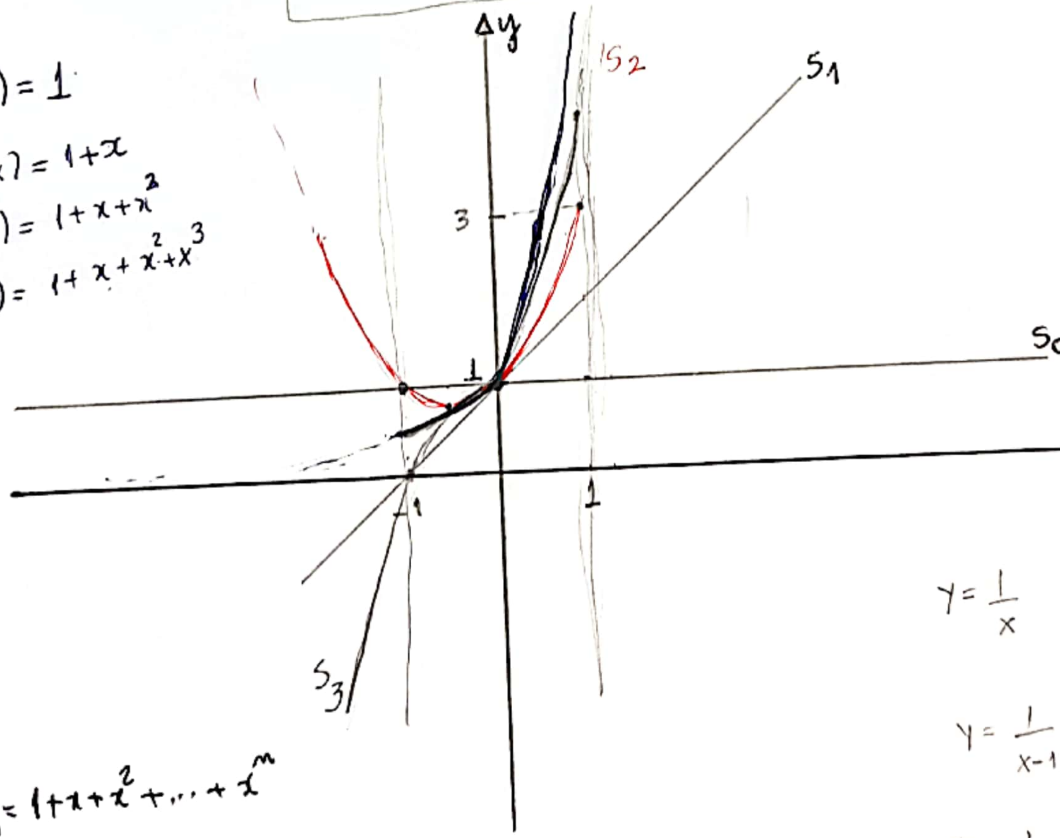
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in]-1, 1[.}$$

$S_0(x) = 1$

$S_1(x) = 1 + x$

$S_2(x) = 1 + x + x^2$

$S_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$



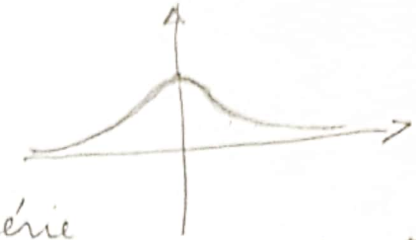
$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

$y = \frac{1}{x}$

$y = \frac{1}{x-1}$

$y = \frac{1}{1-x}$

Exemplo 2. $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$



Escrever g como uma série de potências e determinar o raio de convergência

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \overset{\text{para } |-x^2|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

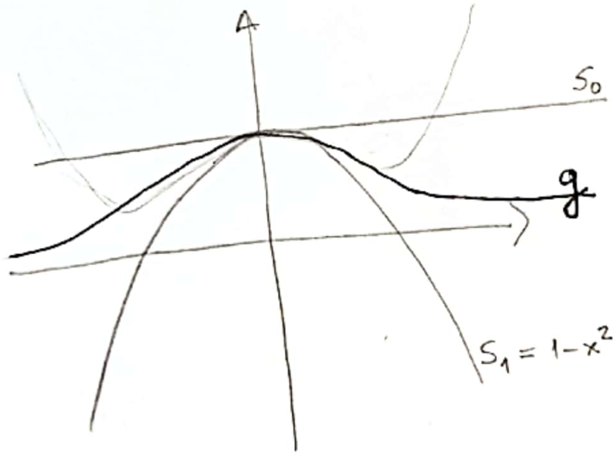
$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^{2n}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^{2n} \,, \qquad |-x^2| < 1 \iff$$

$$|x^2| < 1 \iff$$

$$|x| < 1 \iff$$



Digitalizado com CamScanner

Exemplo 3. $f(x) = \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{2\left(\frac{x}{2}+1\right)}$ ③

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^{n}$$

$$= \frac{1}{2}\sum (-1)^n \frac{x^n}{2^n}$$

para $\left|-\frac{x}{2}\right| < 1$

$\iff |x| < 2 \iff -2 < x < 2$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{1+(1+x)} = \frac{1}{1-(-1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1-x)^n$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x+1)^n}_{\text{série de potências centrada em } -1 = a}$$

para $|1+x| < 1$

$-1 < 1+x < 1$

$\boxed{-2 < x < 0.}$

Exemplo 4 $h(x) = \dfrac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \dfrac{1}{x+2}$

$$\underset{|x|<2}{=} x^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+3}}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{x^3}{2} - 1\,\frac{x^4}{2^2} + \frac{x^5}{2^3} - \frac{x^6}{2^4} + \cdots = \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{2^{n-2}}$$

Teorema. Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ tem raio de convergência $R>0$

então a função definida como $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$,

$x \in \,]a-R, a+R[$ é diferenciável (logo contínua)

nesse intervalo. Além disso:

$$\text{(i)} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (x-a)^{n-1} \qquad (*)$$

e

$$\text{(ii)} \quad \int f(x)dx = K + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1} \qquad (**)$$

e o raio de convergência das séries $(*)$ e $(**)$

é R!

Exemplos. ① $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$$f(x) = (1-x)^{-1} \Rightarrow f'(x) = (-1)(1-x)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Para $|x|<1$, temos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$$

2 $\int \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x) + K$

Por outro lado, $\frac{1}{1-x} \overset{|x|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$

$$\Rightarrow -\ln(1-x) = K' + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

$$= \underset{=?}{K'} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x|<1$$

para $x=0$:

$$0 = -\ln 1 = K' + 0 \qquad \Rightarrow K'=0.$$

Portanto,

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \quad , \quad |x|<1.$$

$x=-1$

$$-\ln 2 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

$$\boxed{\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots}$$

$\boxed{\text{Para } x = \frac{1}{2}}$ → para casa

$$\ln 2 = \ldots$$

Exemplo 3. Determine uma série de potências para a função $f(x) = \text{arctg}\, x$. ⑥

Sabemos que $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \dots$ para $|x| < 1$

Portanto,

$$\text{arctg}\, x = K + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots$$

$\overset{?}{=}$

$$0 = \text{arctg}\, 0 = K$$

$$\Rightarrow \text{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\text{arctg}\, x = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = K + \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx$$

$$\overset{\text{Teor.}}{=} K + \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n}\, dx$$

$$= K + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$K + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{x^{2j-1}}{2j-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} n &= j - 1 \\ 2n &= 2j - 2 \\ 2n+1 &= 2j - 1 \end{aligned}}$$

Série de Taylor

Dada f qualquer, f de classe C^∞ (pode derivar quantas vezes ~~[illegible]~~ quiser)

quero encontrar uma série de potências para f em torno de a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Como encontrar $c_0, c_1, c_2 \ldots$?

$$f(x) = \sum c_n (x-a)^n \quad , \quad |x-a| < R.$$

$$= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{f(a) = c_0}$$

Para casa $\begin{cases} f'(a) = ? \\ f''(a) = ? \\ f'''(a) = ? \end{cases}$