GABARITO P1.

1. Calcule a área da interseção das regiões limitadas pelas curvas

$$\rho = u\cos(\theta)$$

$$\rho = v + r\cos(\theta)$$

Solução A fórmula para a área baixo a curva, de uma curva em coordenadas polares, está dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [\rho(\theta)]^2\, d\theta.$$

As integrais para achar a área da interseção das regiões limitadas pelas curvas dadas são em termos gerais as seguintes

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (u\cos(\theta))^2\, d\theta &= \frac{u^2}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{(\cos(2\theta)+1)}{2} d\theta \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}\right)\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}+\theta\right]_{\alpha}^{\beta}}_{=_\star \int_{\alpha}^{\beta}(u\cos(\theta))^2 d\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\tau} (v + r\cos(\theta))^2\, d\theta &= \frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\tau}\left(v^2 + 2vr\cos(\theta) + \underbrace{(r\cos(\theta))^2}_{\star}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[v^2\theta + 2vr\sin(\theta)\right]_{\gamma}^{\tau} + \frac{r^2}{2}\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}+\theta\right]_{\gamma}^{\tau}\right\} \\ &= \left[\frac{1}{2}\left(v^2+\frac{r^2}{2}\right)\theta + vr\sin(\theta) + \frac{r^2}{8}\sin(2\theta)\right]_{\gamma}^{\tau}. \end{aligned}$$

Observação: Para estas integrais foi usada a relação trigonomérica

$$(\cos(2\theta))^2 = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}.$$

2. Calcule a área da interseção das regiões limitadas pelas curvas

$$\rho = u\sin(\theta)$$

$$\rho = v + r\sin(\theta)$$

Solução A fórmula para a área baixo a curva, de uma curva em coordenadas polares, está dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [\rho(\theta)]^2 \, d\theta.$$

As integrais para achar a área da interseção das regiões limitadas pelas curvas dadas são em termos gerais as seguintes

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (u\sin(\theta))^2 \, d\theta &= \frac{u^2}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{(1-\cos(2\theta))}{2} d\theta \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}\right)\left[\frac{\theta - \sin(2\theta)}{2}\right]_{\alpha}^{\beta}}_{=_\star \int_\alpha^\beta (u\sin(\theta))^2 d\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\tau} (v + r\sin(\theta))^2 \, d\theta &= \frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\tau} \left(v^2 + 2vr\sin(\theta) + \underbrace{(r\sin(\theta))^2}_{\star}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[v^2\theta - 2vr\cos(\theta)\right]_{\gamma}^{\tau} + \frac{r^2}{2}\left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{\gamma}^{\tau}\right\} \\ &= \left[\frac{1}{2}\left(v^2 + \frac{r^2}{2}\right)\theta - vr\cos(\theta) - \frac{r^2}{8}\sin(2\theta)\right]_{\gamma}^{\tau}.\end{aligned}$$

Observação: Para estas integrais foi usada a relação trigonométrica

$$(\sin(2\theta))^2 = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}.$$

3. Calcule o volume do sólido de revoluçõ obtido pela rotação em torno do eixo x do conjunto de todos os (x, y) tais que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \qquad y \geq 0.$$

Solução

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} = \pi \int_{-a}^{a} y^2 dx &= 2\pi \int_0^a y^2 dx \\
&= 2\pi \int_0^a b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\
&= 2\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\
&= 2\pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a \\
&= 2\pi b^2 \left(a - \frac{a}{3}\right) \\
&= 2\pi b^2 \left(\frac{2a}{3}\right) \\
&= \frac{4\pi}{3} ab^2
\end{aligned}$$

4. Calcule
$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(\alpha t)dt \quad \alpha \neq 0, s > 0.$$

Solução

Dica: Use método de partes duas vezes e cuide de não anular a integral to lado esquerdo da igualdade.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(\alpha t)dt &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-st}\sin(\alpha t)dt \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left\{\left[-e^{-st}\frac{\cos(\alpha t)}{\alpha}\right]_0^x - \frac{s}{\alpha}\int_0^x e^{-st}\cos(\alpha t)dt\right\} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left\{\left[-e^{-st}\frac{\cos(\alpha t)}{\alpha}\right]_0^x - \frac{s}{\alpha}\left(\left[e^{-st}\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}\right]_0^x + \frac{s}{\alpha}\int_0^x e^{-st}\sin(\alpha t)dt\right)\right\}
\end{aligned}$$

associe termos semelhantes e note que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{s^2}{\alpha^2}\right)\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(\alpha t)dt &= \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-st}\frac{\cos(\alpha t)}{\alpha}\right]_0^x - \frac{s}{\alpha}\left[e^{-st}\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}\right]_0^x \\
\left(\frac{\alpha^2+s^2}{\alpha^2}\right)\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(\alpha t)dt &= \frac{1}{\alpha} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left[e^{-sx}\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha} + \frac{s}{\alpha}e^{-sx}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\right]}_{=0}(\star) \\
\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(\alpha t)dt &= \frac{\alpha}{\alpha^2+s^2}.
\end{aligned}$$

$(\star)$ Cálculo do limite $\lim_{x\to+\infty} e^{-sx}\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}$
Note que no produto de funções $e^{-sx}\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}$:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

e

$$\frac{-1}{\alpha} \leq \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}, \text{ quer dizer que a função } \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha} \text{ é limitada.}$$

Logo segue de um corolário do Teorema do Confronto (visto em aula) que

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-sx}\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha} = 0.$$

Pelos mesmos argumentos obtemos que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{s}{\alpha}e^{-sx}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} = \frac{s}{\alpha}\lim_{x\to+\infty} e^{-sx}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} = 0.$$

Portanto o limite da soma $(\star)$ é igual a zero.

5. Calcule
$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(\alpha t)dt \qquad \alpha \neq 0, s > 0.$$

Solução
Pela definição de integral imprópria
$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(\alpha t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} e^{-st}\cos(\alpha t)dt$$
Lembre da fórmula de integração por partes $\int udv = uv - \int vdu$ e considere $u = e^{-st}$ e $dv = \cos(\alpha t)dt$. Então
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} e^{-st}\cos(\alpha t)dt = \lim_{x\to+\infty}\left\{\left[e^{-st}\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}\right]_0^x + \frac{s}{\alpha}\int_0^x e^{-st}\sin(\alpha t)dt\right\}$$
Novamente aplique integração por partes com $u = e^{-st}$ e $dv = \sin(\alpha t)dt$.
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} e^{-st}\cos(\alpha t)dt = \lim_{x\to+\infty}\left\{\left[e^{-st}\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}\right]_0^x - \frac{s}{\alpha}\left(\left[e^{-st}\frac{\cos(\alpha t)}{\alpha}\right]_0^x - \frac{s}{\alpha}\int_0^x e^{-st}\cos(\alpha t)dt\right)\right\}$$
associe termos semelhantes e calcule os limites
$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{s^2}{\alpha^2}\right)\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(\alpha t)dt &= \lim_{x\to+\infty}\left[e^{-st}\frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}\right]_0^x - \frac{s}{\alpha}\left[e^{-st}\frac{\cos(\alpha t)}{\alpha}\right]_0^x \\
\left(\frac{\alpha^2+s^2}{\alpha^2}\right)\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(\alpha t)dt &= \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left[e^{-sx}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} - \frac{s}{\alpha}e^{-sx}\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}\right]}_{=_\star 0} + \frac{s}{\alpha^2} \\
\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(\alpha t)dt &= \frac{s}{\alpha^2+s^2}
\end{aligned}$$

($\star$) Cálculo do limite $\lim_{x\to+\infty} e^{-sx}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$
Note que no produto de funções $e^{-sx}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$:
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$
e
$$\frac{-1}{\alpha} \leq \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}, \text{ isto é, a função } \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} \text{ é limitada.}$$
Logo segue de um corolário do Teorema do Confronto (visto em aula) que
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-sx}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} = 0.$$
Pelos mesmos argumentos obtemos que
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{s}{\alpha}e^{-sx}\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha} = \frac{s}{\alpha}\lim_{x\to+\infty} e^{-sx}\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha} = 0.$$
Portanto o limite da soma ($\star$) é igual a zero.

6. Estude a convergência e divergência da integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(ax^2)}{x^\alpha \ln(bx^2+c)} dx, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

Solução

Observe que o integrando da função é da forma $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} g(x)$, sendo $g(x) = \frac{\ln(ax^2)}{\ln(bx^2+c)}$. É possivel usar a regra do L'Hopital para calcular o limite $\frac{\ln(ax^2)}{\ln(bx^2+c)}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(ax^2)}{\ln(bx^2+c)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2ax}{ax^2}\right)\left(\frac{bx^2+c}{2bx}\right) = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{bx^2+c}{ax^2} = 1 > 0.$$

Como $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(ax^2)}{\ln(bx^2+c)} > 0$. Logo provamos a hipóteses do **criterio de comparação por limite** (visto em aula), ou o *exercício do Guidorizzi.*

Portanto obtemos que:

(a) Se $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(ax^2)}{x^\alpha \ln(bx^2+c)} dx$ converge.

(b) Se $\alpha \leq 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(ax^2)}{x^\alpha \ln(bx^2+c)} dx$ diverge.

Exercício do Guidorizzi.
Prove que:
Suponha f integrável em $[a, t]$, para todo $t \geq a$, com f em $[a, +\infty)$ suponha que existe um real α e uma função g tais que, par todo $x \geq \alpha$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} g(x)$. Suponha, além disso, que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = L > 0$. Então:

(a) Se $\alpha > 1$, $\int_a^\infty f(x)dx$ converge.

(b) Se $\alpha \leq 1$, $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

7. Seja $F(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Determina a equação da reta tangente á trajetória de F no ponto $F(t_0)$.

Solução
O vetor tangente á curva no ponto t_0

$$F'(t_0) = (-a\sin(t_0), b\cos(t_0))\,.$$

A reta tangente á trajetória de F passa pelo ponto $F(t_0) = (a\cos(t_0), b\sin(t_0))$. Logo a equação da reta tangente á trajetória de F é

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= F(t_0) + \lambda F'(t_0) \\ &= (a\cos(t_0) - \lambda a\sin(t_0), b\sin(t_0) + \lambda b\cos(t_0))\,. \end{aligned}$$