Sustainable Plans

Mauro Rodrigues (USP)

2020

Introdução

- Comprometimento: governo anuncia uma sequência de impostos, e não muda ex-post
- Mas há incentivos a renegar o anúncio
  - Uma vez que o capital foi acumulado, sua oferta é inelástica
  - Aumentar a taxação sobre o capital levaria a ganhos de eficiência, na medida em que permite reduzir impostos distorcivos em outras margens
- Agentes antecipam eventual mudança e acumulam menos capital
  - Base do imposto sobre o capital encolhe, sendo necessário taxar outras margens, potencialmente trazendo mais distorção
- Inconsistência temporal: ex-ante uma decisão é ótima, mas ex-post não necessariamente
  - Antecipação dos agentes à mudança pode gerar ineficiência
  - Ganhos associados a comprometimento
- Referência:
  - Chari, V. V. and Kehoe, P. J. (1990). "Sustainable Plans." *Journal of Political Economy* 98: 783-802.

Modelo

- Tempo discreto: $t \in \{0, 1, 2, ...\}$
- Contínuo de agentes idênticos, distribuídos uniformemente no intervalo $[0, 1]$
- Função de produção linear

$$Y = F(k, n) = Rk + n$$

  - Produto marginal do capital $= R > 1$
  - Produto marginal do trabalho $= 1$
- Firmas atuam em concorrência perfeita
  - $r_t = R$
  - $w_t = 1$

Timing dentro do período

Em cada período t há dois estágios

1. Consumidores recebem ω unidades do bem de consumo como dotação, que podem ser divididas entre consumo (c_{1t}) e poupança/acumulação de capital (k_t)

$$c_{1t} + k_t = \omega$$

2. Agentes trabalham, recebem renda do capital e do trabalho (líquida de impostos), e consomem (c_{2t})

- Renda líquida de impostos $= (1 - \tau_{nt})n_t + (1 - \tau_{kt})Rk_t$

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt})n_t + (1 - \tau_{kt})Rk_t$$

- $\tau_{nt}, \tau_{kt} \in [0, 1]$

Observação

- Investimento realizado no primeiro estágio e gera capital para ser usado no segundo estágio
- Capital deprecia completamente entre períodos
- Não há variável de estado
- Sucessão de problemas estáticos
    - Todo período t consumidores recebem dotação ω e governo tem que financiar seus gastos constantes

Preferências e restrições

- Utilidade ao longo da vida:

$$\mathbb{U} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{1t} + c_{2t}, \overbrace{\ell_t}^{1-n_t})$$

  - c_{1t} e c_{2t} são substitutos perfeitos

- Governo estabelece $\{\tau_{kt}, \tau_{nt}\}$ de modo a financiar gastos g (constante) no segundo estágio de cada período t

$$\tau_{nt} n_t + \tau_{kt} R k_t = g$$

  - Não há dívida/ativos do setor público

- Suponha:

$$g > (R-1)\omega$$

Comprometimento

Governo benevolente: estabelece impostos de modo a maximizar bem estar do consumidor representativo

Dois arranjos:

1. **Comprometimento:** governo anuncia crivelmente $\{\tau_{kt}, \tau_{nt}\}$ em $t = 0$. Dados estes impostos, consumidores fazem suas escolhas
2. **Não comprometimento:** governo e consumidores fazem suas escolhas sequencialmente:
    - Decisões dos agentes dependem de suas expectativas a respeito das ações futuras do governo

Problema estático

- Considere decisões ocorrendo em apenas um período t
- **Comprometimento:**
  - No início de t, governo anuncia crivelmente alíquotas τ_{kt} e τ_{nt}
  - Dado o anúncio, consumidores fazem suas escolhas (primeiro e segundo estágio ocorrem)
- Como há credibilidade nesse caso, consumidores tomam decisões com base no anúncio do governo
  - Governo implementa impostos de acordo com o anúncio

Comprometimento

Comprometimento

- Resolvendo do fim para o começo (“backward induction”)
- Problema do consumidor no segundo estágio
  - Escolher c_{2t}, n_t
  - Tomando como dados $c_{1t}, k_t, \tau_{nt}, \tau_{kt}$ (definidos anteriormente a este estágio)

$$\max_{c_{2t}, n_t} u(c_{1t} + c_{2t}, 1 - n_t)$$

s.t.

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt}) n_t + (1 - \tau_{kt}) R k_t$$

$$c_{1t}, k_t, \tau_{nt}, \tau_{kt} \text{ dados}$$

Segundo estágio

- Reescrevendo:

$$\max_{n_t} u\left(c_{1t} + (1-\tau_{nt})n_t + (1-\tau_{kt})Rk_t, 1-n_t\right)$$

- Condição de primeira ordem (com relação a n_t):

$$u_{ct}(1-\tau_{nt}) - u_{\ell t} = 0$$

- Ou:

$$\frac{u_{\ell t}}{u_{ct}} = 1 - \tau_{nt} \tag{1}$$

Primeiro estágio

- Escolher c_{1t}, k_t
  - Dados τ_{kt}, τ_{nt} (anúncio crível do governo)
  - Dado que c_{2t}, n_t serão escolhidos de maneira ótima (eq. (1) + restrição orçamentária do 2o estágio)

$$\max_{c_{1t}, k_t} u(c_{1t} + c_{2t}, 1 - n_t)$$

s.t.

$$\begin{aligned}
c_{1t} + k_t &= \omega \\
\frac{u_{\ell t}}{u_{ct}} &= 1 - \tau_{nt} \\
c_{2t} &= (1 - \tau_{nt})n_t + (1 - \tau_{kt})Rk_t
\end{aligned}$$

Primeiro estágio

- Substituindo as restrições orçamentárias

$$\max_{c_{1t},k_t} u[\overbrace{\omega - k_t + (1-\tau_{nt})n_t + (1-\tau_{kt})Rk_t}^{\omega+(1-\tau_{nt})n_t+[(1-\tau_{kt})R-1]k_t}, 1-n_t]$$

s.t.

$$\frac{u_{\ell t}}{u_{ct}} = 1 - \tau_{nt}$$

- Dado que a função objetivo é linear em k_t, a escolha ótima é tal que:

$$k_t = 0, \text{ se } (1-\tau_{kt})R < 1 \Leftrightarrow \tau_{kt} > (R-1)/R$$
$$k_t = \omega, \text{ se } (1-\tau_{kt})R \geq 1 \Leftrightarrow \tau_{kt} \leq (R-1)/R$$

- Escolhas ótimas (nos dois estágios) como função de impostos:
$c_{1t} = c_1(\tau_{nt}, \tau_{kt}), c_{2t} = c_2(\tau_{nt}, \tau_{kt}), k_t = k(\tau_{nt}, \tau_{kt}), n_t = n(\tau_{nt}, \tau_{kt})$

Problema do governo

- Maximizar $u(c_{1t} + c_{2t}, 1 - n_t)$:
  - Dadas as escolhas ótimas dos agentes (que são afetadas por impostos)
  - Dada a restrição orçamentária do governo
- Em outras palavras:

$$\max_{c_{1t}, k_t} u\left(c_1(\tau_{nt}, \tau_{kt}) + c_2(\tau_{nt}, \tau_{kt}), 1 - n(\tau_{nt}, \tau_{kt})\right)$$

s.t.

$$\tau_{nt} n(\tau_{nt}, \tau_{kt}) + \tau_{kt} Rk(\tau_{nt}, \tau_{kt}) = g$$

Problema do governo

- Note que a escolha de capital não varia para $0 < \tau_{kt} \leq (R-1)/R$
  - Não há distorções associadas a variar τ_{kt} nesse intervalo
- Já variações em τ_{nt} sempre causam distorções (veja eq. (1))
- Aumentar τ_{kt} além de $(R-1)/R$ faz com que o capital vá para zero
  - Governo precisaria financiar todo o gasto com imposto sobre o trabalho, gerando muita distorção
- Portanto, o imposto ótimo é:

$$\tau_{kt} = \frac{R-1}{R}$$

  - Arrecada-se o máximo possível dentro do intervalo inelástico de k_t, minimizando a distorção acarretada pela taxação sobre o trabalho

Problema do governo

- Nesse caso, $c_{1t} = 0$ e $k_t = \omega$. Além disso, da restrição orçamentária de 2o estágio e da restrição orçamentária do governo:

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt})n_t + \overbrace{(1 - \tau_{kt})}^{1/R} R \overbrace{k_t}^{\omega} = (1 - \tau_{nt})n_t + \omega$$
$$g = \tau_{nt} n_t + \underbrace{\tau_{kt}}_{(R-1)/R} R \underbrace{k_t}_{\omega} = \tau_{nt} n_t + (R - 1)\omega$$

- Note que a hipótese de que $g > (R - 1)\omega$ faz com que seja necessário taxar trabalho para financiar os gastos

Payoff de comprometimento

τ_{nt} é a solução do seguinte problema

$$\mathbb{W}^R = \max_{n_t, \tau_{nt}} u(c_{2t}, 1 - n_t)$$

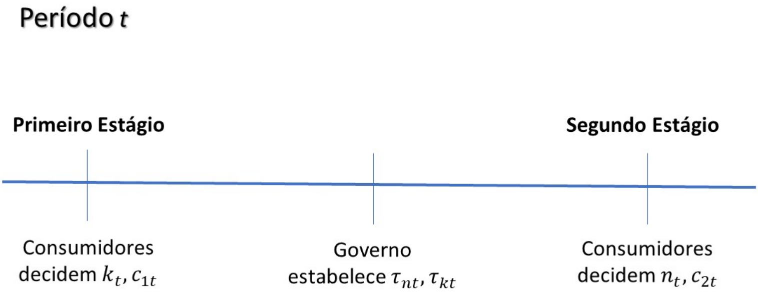
s.t.

$$\begin{aligned} c_{2t} &= (1 - \tau_{nt}) n_t + \omega \\ g &= \tau_{nt} n_t + (R - 1)\omega \\ \frac{u_{\ell t}}{u_{ct}} &= 1 - \tau_{nt} \end{aligned}$$

Não comprometimento

- Suponha agora que o governo não consiga se comprometer com o anúncio inicial
  - Estabelece impostos **após** a decisão de acumulação de capital dos agentes
- Nesse caso, é ótimo taxar o máximo possível o capital, dado que ele é inelástico
  - Isso vale mesmo para um governo benevolente, pois ele busca minimizar a distorção advinda do imposto sobre o trabalho
- Entretanto, os consumidores se antecipam a essa taxação mais elevada, e não acumulam capital no primeiro estágio
  - Arrecadação de imposto sobre o capital é nula, forçando o governo a se financiar unicamente com impostos sobre o trabalho
  - Distorção é mais elevada

Não comprometimento



Não comprometimento

- Novamente usando backward induction
- **Segundo estágio** – similar ao caso anterior

$$
\begin{aligned}
c_{2t} &= (1-\tau_{nt})n_t + (1-\tau_{kt})Rk_t \\
\frac{u_{\ell t}}{u_{ct}} &= 1-\tau_{nt}
\end{aligned}
$$

- **Governo**: escolhe τ_{nt}, τ_{kt} de modo a maximizar $u(c_{2t}, 1-n_t)$
  - Dados k_t e c_{1t}, decididos anteriormente (no 1o estágio)
  - Escolhas ótimas dos agentes no 2o estágio (eq. (1) + restrição orçamentária do 2o estágio)

Não comprometimento

- Da perspectiva do governo, k_t é dado
  - Imposto τ_{kt} não distorce a acumulação de capital
  - Governo tenta minimizar a distorção do imposto sobre o trabalho
- Portanto, imposto ótimo é o mais elevado possível:

$$\tau_{kt} = 1$$

- **Primeiro estágio** – consumidores escolhem c_{1t}, k_t dadas
  - Dadas as escolhas ótimas do governo τ_{nt}, τ_{kt}
  - Dadas as escolhas ótimas do consumidor no 2o estágio c_{2t}, n_t

Não comprometimento

- Dessa forma, consumidores no 1o estágio antecipam que:

$$\tau_{kt} = 1 > \frac{R-1}{R}$$

- Portanto escolhem $k_t = 0$ e $c_{1t} = \omega$
  - Imposto sobre capital produz arrecadação nula
  - Todo o gasto é financiado com imposto sobre a renda do trabalho
- Restrição orçamentária do governo e restrição orçamentária do consumidor no 2o estágio implicam:

$$c_{2t} = (1-\tau_{nt})n_t + \overbrace{(1-\tau_{kt})}^{=0} R \overbrace{k_t}^{=0} = (1-\tau_{nt})n_t$$
$$g = \tau_{nt} n_t + \underbrace{\tau_{kt}}_{=1} R \underbrace{k_t}_{=0} = \tau_{nt} n_t$$

Payoff de não comprometimento

τ_{nt} é a solução do seguinte problema

$$\mathbb{W}^N = \max_{n_t, \tau_{nt}} u(\omega + c_{2t}, 1 - n_t)$$

s.t.

$$\begin{aligned} c_{2t} &= (1 - \tau_{nt}) n_t \\ g &= \tau_{nt} n_t \\ \frac{u_{\ell t}}{u_{ct}} &= 1 - \tau_{nt} \end{aligned}$$

Comparando payoffs

Não comprometimento

$$\mathbb{W}^N(g) = \max_{n_t,\tau_{nt}} u\left(\omega + (1-\tau_{nt})n_t, 1-n_t\right)$$

s.t.

$$g = \tau_{nt} n_t$$
$$\frac{u_{\ell t}}{u_{ct}} = 1 - \tau_{nt}$$

Comprometimento

$$\mathbb{W}^R(g) = \max_{n_t,\tau_{nt}} u\left(\omega + (1-\tau_{nt})n_t, 1-n_t\right)$$

s.t.

$$g - (R-1)/R = \widehat{g} = \tau_{nt} n_t$$
$$\frac{u_{\ell t}}{u_{ct}} = 1 - \tau_{nt}$$

Comparando payoffs

- Note que:
$$\mathbb{W}^R(g) = \mathbb{W}^N(\widehat{g})$$
- Como os payoffs são decrescentes em g:
$$\mathbb{W}^N(\widehat{g}) > \mathbb{W}^N(g)$$
- Segue então que:
$$\mathbb{W}^R(g) > \mathbb{W}^N(g)$$
- Payoff de comprometimento mais elevado que o de não comprometimento

Jogo repetido

- Se esse jogo se repetir, é possível implementar a solução de comprometimento?
  - Sucessão de problemas estáticos
- Digressão: dilema dos prisioneiros repetido
  - Dois jogadores: P1 e P2
  - Duas estratégias: Confessar (C), Não Confessar (NC)

Dilema dos prisioneiros repetido

P2

		C	NC
P1	C	$(1,1)$	$(5,0)$
	NC	$(0,5)$	$(3,3)$

Equilíbrio de Nash estático = (C,C)

Dilema dos prisioneiros repetido

- Suponha que o jogo se repita infinitamente

$$\text{Payoff} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t p_t, \ 0 < \beta < 1$$

  - p_t: payoff estático em t
- É possível sustentar cooperação – i.e., ambos jogam NC?
- "Trigger strategy"
  - Cada jogador inicialmente coopera
  - Pune com Nash estático para sempre se o outro desviar
- Desvio: ganho de curto prazo, mas perda futura pela reversão ao Nash estático
  - Se β for suficientemente alto, perda futura mais que compensa ganho de curto prazo
  - Possível sustentar cooperação

Dilema dos prisioneiros repetido

- No exemplo:

$$\text{Payoff de continuar cooperando} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t 3 = \frac{3}{1-\beta}$$

$$\text{Payoff de desviar} = \underbrace{5}_{\text{ganho de curto prazo}} + \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t 1}_{\text{Nash estático}}$$

$$= 5 + \frac{\beta}{1-\beta}$$

- É possível sustentar cooperação se:

$$\frac{3}{1-\beta} \geq 5 + \frac{\beta}{1-\beta} \Rightarrow \beta \geq 1/2$$

De volta ao problema de taxação

- Jogo entre consumidores e governo se repete infinitamente
- É possível sustentar a solução de comprometimento?
  - Mesmo que o governo não tenha tecnologia de comprometimento
- Desvio:
  - Consumidores acumulam capital: $k_t = \omega, c_{1t} = 0$
  - Governo implementa $\tau_{kt} = 1$
- Punição: consumidores escolhem $k_t = 0$ para sempre
  - Solução de não comprometimento para sempre

Payoff de desvio

- Se indivíduos acumulam capital ($k_t = \omega, c_{1t} = 0$) e governo escolhe $\tau_{kt} = 1$:

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt})n_t + \overbrace{(1 - \tau_{kt})}^{=0} R \overbrace{k_t}^{=\omega} = (1 - \tau_{nt})n_t$$
$$g = \tau_{nt} n_t + \underbrace{\tau_{kt}}_{=1} R \underbrace{k_t}_{=\omega} = \tau_{nt} n_t + R\omega$$

- Payoff de desvio é dado por:

$$\mathbb{W}^D = \max_{n_t, \tau_{nt}} u(c_{2t}, 1 - n_t)$$

s.t.

$$c_{2t} = (1 - \tau_{nt})n_t$$
$$g = \tau_{nt} n_t + R\omega$$
$$\frac{u_{\ell t}}{u_{ct}} = 1 - \tau_{nt}$$

Jogo repetido

- Payoffs ao longo do tempo são:

$$\text{Payoff de continuar cooperando} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathbb{W}^R = \frac{\mathbb{W}^R}{1-\beta}$$

$$\begin{aligned} \text{Payoff de desviar} &= \mathbb{W}^D + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \mathbb{W}^N \\ &= \mathbb{W}^D + \frac{\beta}{1-\beta} \mathbb{W}^N \end{aligned}$$

- Portanto, solução de comprometimento é implementável se:

$$\frac{\mathbb{W}^R}{1-\beta} \geq \mathbb{W}^D + \frac{\beta}{1-\beta} \mathbb{W}^N$$

Jogo repetido

- Ou:

$$\mathbb{W}^R + \frac{\beta}{1-\beta}\mathbb{W}^R \geq \mathbb{W}^D + \frac{\beta}{1-\beta}\mathbb{W}^N$$

$$\frac{\beta}{1-\beta}\left[\mathbb{W}^R - \mathbb{W}^N\right] \geq \mathbb{W}^D - \mathbb{W}^R$$

- O lado esquerdo acima é positivo
  - Igual a zero se $\beta = 0$
  - Tende a infinito quando β se aproxima de 1
- Portanto, existe $\hat{\beta} \in [0,1)$ tal que, se $\beta \geq \hat{\beta}$, a solução de comprometimento é sustentável

Jogo repetido