Aula 16 – Critérios de convergência para séries

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Teorema 1

Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ *converge, então* $x_n \to 0$.

Teorema 2 (Teste da Comparação)

Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sequências tais que* $0 \leq x_n \leq y_n$, *para todo* $n \geq n_1$ *(para algum* $n_1 \in \mathbb{N}$*). Então:*

(a) *Se* $\sum_{n=n_0}^{\infty} y_n$ *converge, então* $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ *converge.*

(b) *Se* $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ *diverge, então* $\sum_{n=n_0}^{\infty} y_n$ *diverge.*

Exemplos

- A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.
- Se $-1 < a < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ converge.
- A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.
- A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

Teorema 3 (Teste da Comparação no limite)

Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *duas sequências de termos positivos. Se existe um número real* $c > 0$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = c$$

então $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ *converge se, e somente se,* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} y_n$ *converge.*

Exemplo 1

Prove que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{p(n)}$ *converge, onde* $p(x)$ *é um polinômio de grau maior ou igual a 2, com coeficiente do termo de maior grau positivo.*

Teorema 4 (Teste da Integral)

Seja $f : [n_0, \infty[\to \mathbb{R}$ *uma função contínua, positiva e decrescente, com* $n_0 \in \mathbb{N}^*$. *Seja* $x_n = f(n)$. *Então a série* $\displaystyle\sum_{n_0}^{\infty} x_n$ *converge se, e somente se, a integral imprópria* $\displaystyle\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ *for convergente.*

Corolário 1

Seja $p > 0$ *um número real. A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^p}$ *converge se, e somente se,* $p > 1$.

Definição 1

Uma série alternada é uma série da forma $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n x_n$ *ou* $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$, *onde* $x_n > 0$, *para todo* $n \geq n_0$. *Isto é, uma série é alternada se o sinal do termo geral alterna entre positivo e negativo.*

Teorema 5 (Teste da série alternada)

Se $x_{n+1} \leq x_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *e* $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, *então a série* $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n x_n$ *converge.*

Definição 2

Uma série $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ *é absolutamente convergente se* $\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|$ *converge.*

Definição 3

Uma série é condicionalmente convergente se é convergente mas não absolutamente convergente.

Exemplo 2

A série alternada $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *é condicionalmente convergente.*

Teorema 6

Toda série absolutamente convergente é convergente.

Demonstração:

- Note que $0 \leq x_n + |x_n| \leq 2|x_n|$.
- Pelo Teste da Comparação, $\sum_{n=n_0}^{\infty} (x_n + |x_n|)$ converge.
- Pelas propriedades operatórias (que facilmente são transferidas de sequências para série) temos:
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} (x_n + |x_n|) - \sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|.$

$\blacksquare$

Teorema 7 (Teste da Razão)

Sejam $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ *uma série e* $L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|$*, podendo esse limite ser um número real ou* ∞*. Temos:*

(a) *Se* $L < 1$*, a série é absolutamente convergente.*

(b) *Se* $L > 1$ *ou é* ∞*, a série é divergente.*

Observação 1

Se $L = 1$*, o teste é inconclusivo. Exemplos:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge e* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

Exemplo 3

Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ *converge e se é absolutamente convergente.*

Exemplo 4

Verifique se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ *converge.*

Teorema 8 (Teste da Raiz)

Sejam $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ *uma série e* $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$*, podendo esse limite ser um número real ou* ∞*. Temos:*

(a) *Se* $L < 1$*, a série é absolutamente convergente.*

(b) *Se* $L > 1$ *ou é* ∞*, a série é divergente.*

Observação 2

Se $L = 1$*, o teste é inconclusivo.*

Exemplo 5

Verifique a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^{n}$

Fim