Aula 18 - 14/10

terça-feira, 27 de outubro de 2020 09:09

- Teorema do pto. fixo de Banach:
  $F: M \circlearrowleft$ contração $\Rightarrow \exists! \, \bar{x} \in M$
  tq $F(\bar{x}) = \bar{x}$ e $\forall x_0 \in M$, a seq. def.
  por $x_{n+1} = F(x_n)$ converge p/ $\bar{x}$.
  (Enunciado + prova)

- Escólio: $d(\bar{x}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$

- Aplicação: Existência e unicidade p/ o problema de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y^0 \end{cases}$
  (Enunciado)

- Teorema: $M = \mathcal{C}[a,b]$ com d_∞ é completo
  (Serve p/ $\mathcal{C}(K)$, K cpto. tbm)

- Recordação da diferença entre convergência pontual e uniforme p/ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n: M \to \mathbb{R}$

- Exemplo $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$
  converge pontualmente p/ f descontínua
  (∴ ñ-uniformemente)

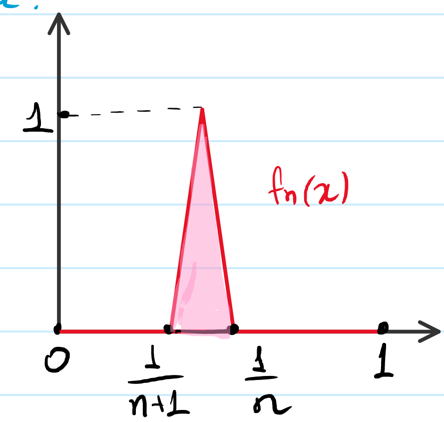
- Relação entre convergência uniforme e d_∞ em um dom. cpto.

- Pergunta: $\mathcal{C}[a,b]$ c/ a distância d_2 é completo?
  Resposta:

completo.

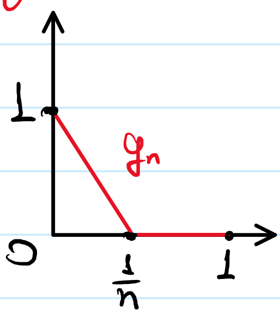
Resposta:

NÃO!



$d_1(f_n, f_{n+k}) \leq \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy com respeito à métrica d_1, mas $f_n \xrightarrow{d_1} \hat{f} \Rightarrow$ ñ é exemplo deste espaço ñ ser completo

Exercício: • decidir se a seq. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge neste espaço:

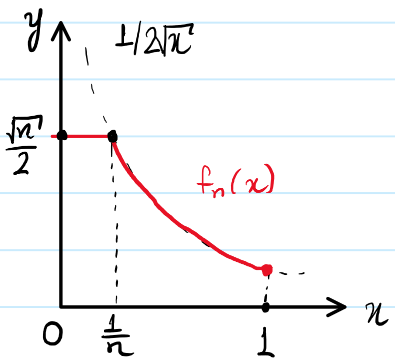


• Procurar exemplo de seq. de Cauchy que ñ converge neste espaço

Aula 19 - 16/10

domingo, 1 de novembro de 2020 01:33

- Exemplo 1



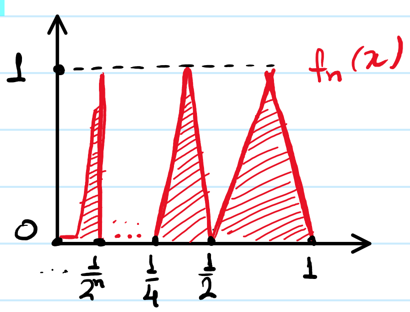
$d_1(f_{n+k}, f_n) \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy

- Af. Se $f_n \xrightarrow{d_1} f$, em $(0,1]$ temos $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ideia:

$$\underbrace{d(f_n,f)}_{\to 0} \geq \underbrace{\int_{\frac{1}{n_0}}^{1} |f-g|\,dx - \int_{\frac{1}{n_0}}^{1}}_{\Rightarrow \text{tem que ser } 0} \underbrace{|f_n - g|}_{\equiv 0}\,dx$$

- Exemplo 2



$f_n \xrightarrow{d_1} f \Rightarrow f$ é a "função zig-zag" em $(0,1]$, embora $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uniformemente limitada e de Cauchy em L_1.

- Demonstração do teorema de que $\mathcal{C}[a,b]$ é completo.

  Atenção à ordem correta da demonstração: ① o limite pontual é contínuo
  ② ocorre a convergência em $\mathcal{C}[a,b]$ p/ este limite

- Obs de que tb. vale p/ $\mathcal{C}(K,N)$, K cpto. e N completo

Aula 20 - 19/10

segunda-feira, 9 de novembro de 2020 21:44

- Teorema da Aproximação de Weierstrass:

Dado $f \in \mathcal{C}[a,b]$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ p_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ função polinomial t.q. $d_\infty(f, p_\varepsilon) < \varepsilon$

[$\mathcal{P}[a,b]$ é denso em $\mathcal{C}[a,b]$]

- Teorema da Aproximação Polinomial

Dados $K \subset \mathbb{R}^p$ cpto, $f : K \to \mathbb{R}^q \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ p_\varepsilon : K \to \mathbb{R}^q$ função polinomial (nas componentes) t.q. $\|f(x) - p_\varepsilon(x)\| < \varepsilon\ \forall\ x \in K$.

- Teorema de Stone Weierstrass

Sejam $K \subset \mathbb{R}^p$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K)$ satisfazendo:

a) $f \equiv 1$ está em $\mathcal{A}$

b) $\forall\ f, g \in \mathcal{A}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $af + bg \in \mathcal{A}$ [Álgebra separante]

c) $f, g \in \mathcal{A} \Rightarrow fg \in \mathcal{A}$

d) $x, y \in K$ e $x \neq y \Rightarrow \exists\ f \in \mathcal{A}$ tq. $f(x) \neq f(y)$

Então qqer. $f : K \to \mathbb{R}$ contínua pode ser uniformemente aproximada por funções de $\mathcal{A}$.

- Teorema de Aproximação de Stone

$K \subset \mathbb{R}^p$ cpto, $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}(K)$ satisfazendo:

a) $f, g \in \mathcal{L} \Rightarrow \inf\{f, g\} \cup \sup\{f, g\} \in \mathcal{L}$

b) $x, y \in K$ e $x \neq y \Rightarrow$ dados $a, b \in \mathbb{R}$ $\exists\ f, g \in \mathcal{L}$ tq $f(x) = a$ e $g(y) = b$

Então qqer $f : K \to \mathbb{R}$ contínua pode ser uniformemente aproximada por função de $\mathcal{L}$.

- Def de equicontinuidade

- Teorema de Arzela-Ascoli

$K \subset \mathbb{R}^p$ cpto e $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^q)$. São equivalentes:

a) $\mathcal{F}$ é uma família limitada e uniformemente equicontínua

b) Cada seq. em $\mathcal{F}$ tem uma subsequência que converge uniformemente em K (ou seja, em $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^q)$)

[Conclusão: $\mathcal{F}$ é cpto. em $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^q)$]

- Exemplo: Aplicação às EDP

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \forall\ x \in \Omega \\ u|_{Fr\,\Omega} = u_0 \end{cases}$$, onde:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado

$u_0 \in \mathcal{C}(Fr(\Omega))$

$\bar{\Omega}$ é cpto.

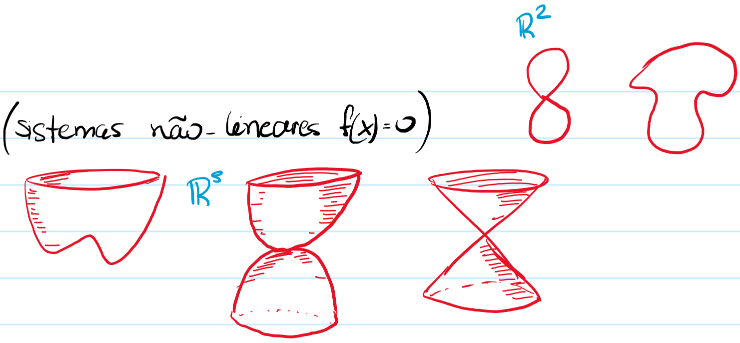
$u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$

(Problema de contorno p/ a equação de Laplace)

Solução tem forma integral $\Rightarrow$ se saubermos resolver p/ um conjunto denso de u_0's conseguimos produzir soluções por aproximações e limites.

Aula 21 - 21/10

sexta-feira, 13 de novembro de 2020 00:01



- Objetos de estudo:
  - conjuntos definidos por "zeros" de funções (sistemas não-lineares $f(x)=0$)
  - conjuntos que são gráficos de funções
  - conjuntos que são imagens de função

Lembrete: restringir-se a retas em geral não é suficiente p/ obter infos a respeito de uma função de 2 ou + variáveis

- Derivada parcial e derivada direcional:

  $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q,\ a \in \mathring{A}$

$$D_v f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$ [Derivada direcional]

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) = D_{e_i} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}$$ [Derivada parcial]

- Gradiente de $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$: $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$

- Matriz Jacobiana de $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$:

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{bmatrix} \quad (q \times p)$$

- $D_{\alpha v} f(\bar{x}) = \alpha D_v f(\bar{x})$

- Mesmo que $\exists\ D_v f(\bar{x})$ e $D_u f(\bar{x})$, ñ precisa existir $D_{u+v} f(\bar{x})$

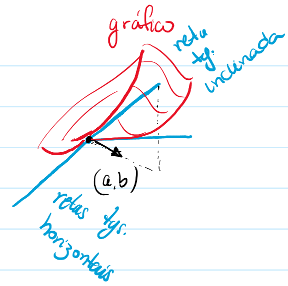
- Exemplo: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Exercício: } v = (a,b) \Rightarrow \exists\ D_v f(0,0) = \dots}$

Aula 22 - 23/10

sexta-feira, 13 de novembro de 2020 17:36



- Exemplo: discussão sobre a aproximação $\frac{|\text{Erro}|}{\|x-\bar{x}\|} = \frac{|f(\bar{x}) + Jf(\bar{x})(x-\bar{x})|}{\|x-\bar{x}\|}$ e plano tangente

  ↳ transformação linear como função de $x-\bar{x}$

- Definição de diferenciabilidade e da diferencial

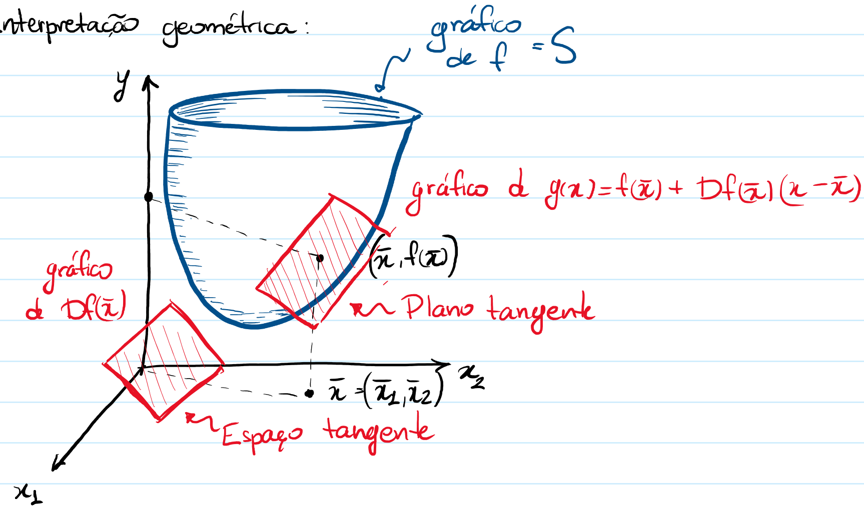
$$Df(\bar{x}): \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q, \quad u \mapsto Df(\bar{x})(u)$$

(Transformação linear)

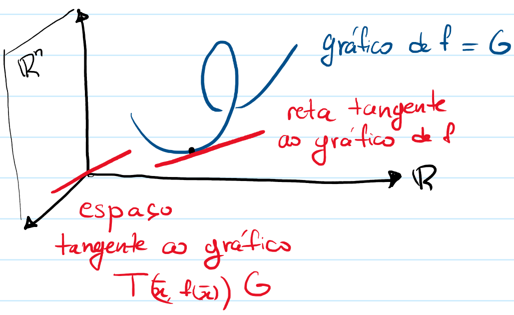
- $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em $\bar{x} \in A^\circ \Leftrightarrow$ é diferenciável. Além disso, $Df(\bar{x})(u) = f'(\bar{x})u$

Exercício: Demonstrar este resultado

- Interpretação geométrica:



- Proposição: $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é derivável $\Leftrightarrow$ é diferenciável e $Df(\bar{x})u = (f_1'(\bar{x})u, \dots, f_n'(\bar{x})u)$



Aula 23 - 28/10

sexta-feira, 13 de novembro de 2020 21:05

- **Exemplo.**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \Rightarrow T(u) = Jf(0,0)\,u \text{ ñ é diferencial de } f \text{ em } (0,0).$$

Pergunta: Alguma $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linear é $Df(0,0)$?
Resposta: NÃO! Ver resultados seguintes

- Obs. $Df(\bar{x})\, e_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})$ e $[Df(\bar{x})]_{\text{canônica}} = Jf(\bar{x})$

- Corolário. A única candidata a $Df(\bar{x}): \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ é $T(u) = Jf(\bar{x})\,u$

- $Df(\bar{x})\,u = D_u f(\bar{x})$
  é linear em u

- Teorema: Condições necessárias para diferenciabilidade em $\bar{x} \in A^\circ$

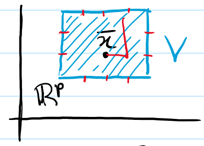
- Teorema. $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $\bar{x} \in A^\circ$. Suponha que $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(x)$ em uma vizinhança de $\bar{x}$ e sejam contínuas em $\bar{x}$. Então, f é diferenciável em $\bar{x}$.
  [Condição suficiente para diferenciabilidade]

Aula 24 - 04/11

sexta-feira, 13 de novembro de 2020 21:30

- Aplicação do TVM p/ $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

- Demonstração do teorema p/ condição suficiente p/ diferenciabilidade



- Exemplo: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 e^{x_2 x_3} + \cos x_1 x_3^2$ é diferenciável em $\bar{x} = (1,2,3)$?

- Resumo:

$\exists \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}$ em uma vizinhança de $\bar{x}$ e são contínuas em $\bar{x}$?

SIM
OK! $\exists$ $Df(\bar{x})$ e $Df(\bar{x}) = Jf(\bar{x})u$

NÃO → $\exists \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\bar{x})$?

NÃO
$\nexists$ $Df(\bar{x})$ (f não é diferenciável)

SIM

Testar a definição

$\exists$ $D_u f(\bar{x})$ e é linear em u?

SIM

- Recordação de $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$, satisfazendo $\|I\| = 1$ e $\|T \circ S\| \leq \|T\| \, \|S\|$ é norma em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$

Aula 25 - 06/11

sábado, 14 de novembro de 2020 15:14

- T linear $\Rightarrow$ $\|T(u)\| \leq \|T\| \|u\|$ $\forall u \in \mathbb{R}^n$, e T é Lipschitz

- Propriedades da diferencial: $f, g: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ diferenciáveis em $\bar{x} \in A^\circ$.
  (i) f é contínua em $\bar{x}$
  (ii) $Df(\bar{x})$ é única
  (iii) $D(\alpha f + \beta g)(\bar{x}) = \alpha Df(\bar{x}) + \beta Dg(\bar{x})$

Exercício: Demonstrar essas propriedades

- Regra da cadeia: $D(f \circ g)(\bar{y}) = Df(g(\bar{y})) \circ Dg(\bar{y})$

- Corolário: $J(f \circ g)(\bar{y}) = Jf(g(\bar{y}))\, Jg(\bar{y})$

- Revisão da prova da regra da cadeia no caso real

- Demonstração da regra da cadeia (usando norma de transf. linear)

Exercício: $f, g: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ diferenciáveis em $\bar{x}$

(a) $H: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$H(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$

$\Rightarrow$ H é diferenciável em $\bar{x}$ e: $DH(\bar{x})(u) = \langle Df(\bar{x})(u), g(\bar{x}) \rangle + \langle f(\bar{x}), Dg(\bar{x})(u) \rangle$

(b) $G: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$G(x,y) = \langle f(x), g(y) \rangle$

$\Rightarrow$ G é diferenciável em $(\bar{x}, \bar{x})$ é: $DG(\bar{x}, \bar{x})(u, v) = \langle Df(\bar{x})(u), g(\bar{x}) \rangle + \langle f(\bar{x}), Dg(\bar{x})v \rangle$

Aula 26 - 09/11

sábado, 14 de novembro de 2020 16:46

- **Teorema:** $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathring{A}$ segmento de extremidades $x_1, x_2 \in \mathring{A}$. Se f é diferenciável em cada pto. de S, então $\exists\, \bar{x} \in S$ t.q.: $f(x_2) - f(x_1) = Df(\bar{x})(x_2 - x_1)$

- **Obs** O teorema não funciona p/ $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$

- **Teorema.** $f: A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, S como antes. Então $\exists\, \bar{x} \in S$ t.q.: $\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \|Df(\bar{x})\|\,\|x_2 - x_1\|$

- **Método de Newton** p/ zeros de funções:

Equação: $f(x) = 0$ $\longleftrightarrow$ Equação equivalente de pto. fixo: $\phi(x) = x$

$\downarrow$ Método de Newton

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$\bar{x}$ zero de f e $f'(\bar{x}) \neq 0 \Rightarrow \phi$ fica def numa vizinhança de $\bar{x}$, $\phi'(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \exists\, [a,b]$ t.q. $|\phi'(x)| \leq k < 1\ \forall x \in [a,b]$

Diminuindo $[a,b]$ se necessário: $\phi([a,b]) \subset [a,b]$ e é contração

- **Método de Newton p/ sistemas não-lineares**

$f: A \subset \mathbb{R}^p \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^p$

$x = (x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ com $Df(x)$ inversível $\forall x \in A$

ϕ do método de Newton: $\phi(x) = x - [Df(x)]^{-1} f(x)$

$J\phi(\bar{x}) = I - J\left([Jf(x)]^{-1}\right) f(x) \Rightarrow D\phi(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \exists$ bola $B_\varepsilon[\bar{x}]$ onde $\|D\phi(\bar{x})\| \leq k < 1$

Aula 27 - 11/11

sábado, 14 de novembro de 2020 17:18

- Aplicação do TVM: $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ com derivadas parciais contínuas

$$Df: \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$
$$x \mapsto Df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

I) A função Df é contínua

II) $K \subset \mathbb{R}^n$ cpto. $\Rightarrow f|_K$ é Lipschitz

$\boxed{\text{Exercício: Provar I)}}$

- Derivadas parciais de ordem mais alta

- Definição de f de classe $\mathcal{C}^k$

- Teorema. Se $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tem derivadas de 1ª ordem contínuas, $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ e é contínua em $\bar{x}$, então $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x})$ e: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x})$ [Teorema de Schwartz]

- Exemplo. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1 \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x_1 \in \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x}) = 0 \ \forall \bar{x}$, $\nexists \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{x})$ p/ nenhum $\bar{x}$

$\boxed{\text{Exercício: Procurar um exemplo onde ambas existem e são diferentes}}$

- Derivadas (diferenciais) de ordem superior

Situação I
- $\exists \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p} \Rightarrow \exists Jf(\bar{x})$
- $\exists \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}$ numa viz. de $\bar{x}$ e são contínuas em $\bar{x} \Rightarrow \exists Df(\bar{x})$
- f de classe $\mathcal{C}^1 \Rightarrow \exists Df(x) \ \forall x \in \Omega$ e $Df(x)(u) = Jf(x)u$

Situação II
- $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) \Rightarrow \exists \underbrace{\text{Hess} f(\bar{x})}_{=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})\right]} \in M_{p \times p}(\mathbb{R})$
- $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e são contínuas em $\bar{x} \Rightarrow$ essa matriz é simétrica
- f de classe $\mathcal{C}^2 \Rightarrow \text{Hess} f(x)$ existe e é simétrica $\forall x$

- Definição $D^2 f(\bar{x}): \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ é a forma bilinear $D^2 f(\bar{x})(u,v) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) u_i v_j$

- $D^2 f(\bar{x})(u,v) = \langle \text{Hess} f(\bar{x}) u, v \rangle = v^T \text{Hess} f(\bar{x}) u$

- Pergunta: $\dfrac{\left| f(x) - f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2!} D^2 f(\bar{x})(x-\bar{x})^2 \right|}{\|x - \bar{x}\|^2} \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} 0$?

Resposta: SIM, se f é de classe $\mathcal{C}^2$.

Aula 28 - 13/11

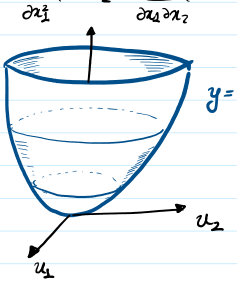
segunda-feira, 23 de novembro de 2020 20:39

- Revisão de como chegar nas derivadas de ordem superior

- $f \in C^2 \Rightarrow Q(u) = D^2f(\bar{x})(u)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x})\, u_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{x})\, u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{x})\, u_2^2$ é uma forma quadrática

- Gráficos de cônicas:

[dependem dos auto-valores da matriz (simétrica) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de Q]



$y = Q(u)$
[quando $a>0$, $ac-b^2>0$]

- Exemplo. $f: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + r(x)$, $\bar{x} = (0,0)$, com a hipótese: $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{r(x)}{\|x-\bar{x}\|^2} = 0$

$f(\bar{x}) = 0$ (aproximação de. p/ f)
$Df(\bar{x})(x-\bar{x}) = 0$
A hipótese implica que $Hessf(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \sim x_1^2 + 4x_2^2$.
Dedução de que, dado $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta>0$ t.q $0<\|x\|<\delta \Rightarrow f(x) > x_1^2 + 4x_2^2 - \varepsilon\|x\|^2$ (comportamento de f é parecido com o de Q próx. à origem)

Aula 29 - 16/11

quarta-feira, 25 de novembro de 2020 17:08

- Formas quadráticas em $\mathbb{R}^n$: $Q(\lambda u) = \lambda^2 Q(u)$ da forma $Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j$, com forma matricial $Q(u) = \langle Au, u\rangle$, $A = (a_{ij})$

- Uma transformação bi-linear $B(u,v) = \langle Au, v\rangle$ induz a forma $Q(u) = B(u,u)$ [No nosso caso: $B = D^2 f(\bar{x})$, $A = \text{Hess} f(\bar{x})$ matriz simétrica]

- Def. de pto crítico de $f: \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Algumas informações sobre formas quadráticas

- Representação matricial: $A = [a_{ij}]$ matriz de $B(u,v) = \langle Au, v\rangle \Rightarrow a_{ij} = B(e_i, e_j)$.

- Afirmação de Álgebra Linear: A simétrica $\Rightarrow \exists\, C$ ortogonal t.q. $C^t A C$ é diagonal ($\Rightarrow A$ tem base ortogonal de autovetores)

- Nesta base: $\tilde{Q}(\tilde{u}) = d_1 \tilde{u}_1^2 + \dots + d_n \tilde{u}_n^2$, onde os d_i são as raízes do polinômio característico.

- Exemplo. $Q(u) = u_1^2 - 4u_1u_2 + u_2^2 \Rightarrow$ autovalores são $-1, 3 \Rightarrow C^t A C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{Q}(\tilde{u}) = 3\tilde{u}_1^2 + (-1)\tilde{u}_2^2 \Rightarrow \tilde{Q}$ é indefinida

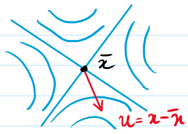
- Teorema. $f: \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ com pto. crítico $\bar{x}$. Então:
  a) $\text{Hess} f(\bar{x})$ definida positiva $\Rightarrow f$ tem mínimo local estrito em $\bar{x}$
  b) $\text{Hess} f(\bar{x})$ definida negativa $\Rightarrow f$ tem máximo local estrito em $\bar{x}$
  c) $\text{Hess} f(\bar{x})$ indefinida $\Rightarrow f$ tem pto. de sela em $\bar{x}$

- Critério de Sylvester $A = [a_{ij}]$ simétrica, definimos $A_1 = [a_{11}]$, $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, ..., $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$
  - $\det A_j > 0\ \forall j \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow A$ é definida positiva
  - $\det A_j > 0$ p/ j par, $\det A_j < 0$ p/ j ímpar $\Rightarrow A$ é definida negativa

Aula 30 - 18/11

sexta-feira, 27 de novembro de 2020 17:26

- O caso em que $H = \text{Hess}\, f(\bar{x})$ é indefinida

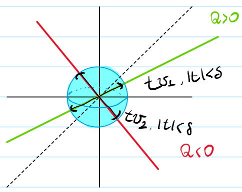


$f(x) = \frac{1}{2!} D^2 f(\bar{x})(x-\bar{x})^2 + R_2(x)$,

$\frac{R_2(x)}{|x-\bar{x}|^2} \xrightarrow{x \to \bar{x}} 0$

$D^2 f(\bar{x})\, u^2 = Q(u) = \langle Hu, u\rangle$

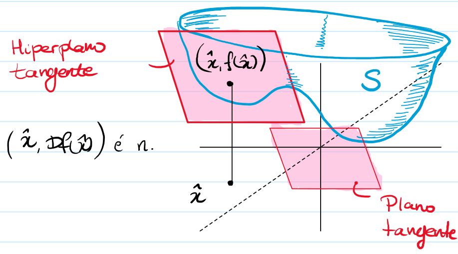
$\begin{cases} \lambda_1 > 0 \text{ autovalor com autovetor } v_1 \\ \lambda_2 < 0 \text{ autovalor com autovetor } v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(tv_1) = t^2 \lambda_1 \|v_1\|^2 > 0 \\ Q(tv_2) = t^2 \lambda_2 \|v_2\|^2 < 0 \end{cases} \quad \forall\, t \neq 0$



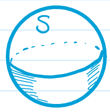
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon$ tq $|R_2(x)| < \varepsilon \|x-\bar{x}\|^2$ se $\|x - \bar{x}\| < \delta$

$\frac{1}{2!} D^2 f(\bar{x})(x-\bar{x})^2 - \varepsilon \|x-\bar{x}\|^2 < f(x) - f(\bar{x}) < \frac{1}{2!} D^2 f(\bar{x})(x-\bar{x})^2 + \varepsilon \|x-\bar{x}\|^2$

$\Rightarrow$ escolhendo ε tq $\varepsilon + \frac{\lambda_2}{2} < 0$, $-\varepsilon + \frac{\lambda_1}{2} > 0$ e fazendo $x - \bar{x} = t v_j$, $|t| < \delta$, temos $\begin{cases} f(\bar{x} + tv_1) < f(\bar{x}) \\ f(\bar{x} - tv_2) > f(\bar{x}) \end{cases}$



- Superfície definida por gráfico de função f
- Dimensão do espaço tangente (imagem de $\Gamma(u) = (u, Dg(\hat{x})u)$) e do "hiperplano" tangente ao gráfico em $(\hat{x}, Df(\hat{x}))$ é n.
- $T_{(\hat{x}, f(\hat{x}))} S = \text{Im}\, \Gamma$
- Exemplo: superfície que não é gráfico de função



Aula 31 - 23/11

terça-feira, 8 de dezembro de 2020 13:03

- Ideia da prova que $DH(\bar{x}) = \langle Df(\bar{x})u, g(\bar{x})\rangle + \langle f(\bar{x}), Dg(\bar{x})u\rangle$ qdo. $H(x) = \langle f(x), g(x)\rangle$.

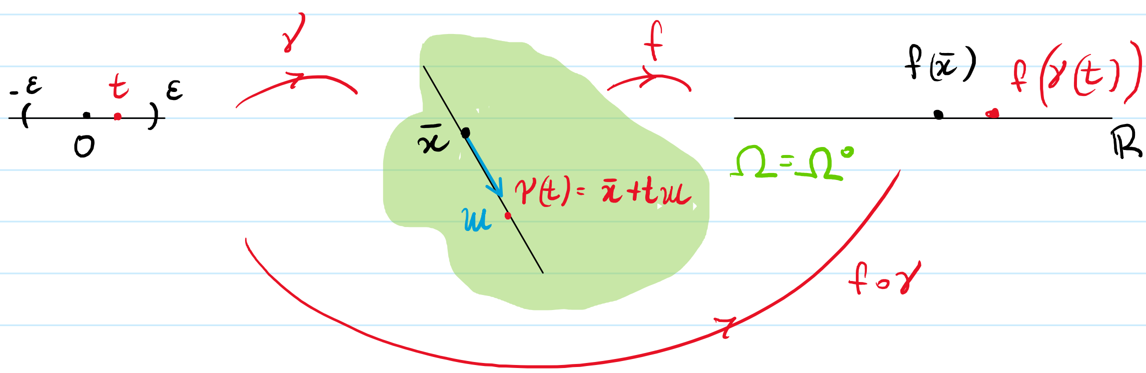
- Caso geral da composição com uma bilinear $B(x,y)$:

$$H(x) = B(f(x), g(x)) \Rightarrow DH(\bar{x})(u) = B(Df(\bar{x})u, g(\bar{x})) + B(f(\bar{x}), Dg(\bar{x})u)$$

Exercício: R trilinear, $H(x) = R(f(x), g(x), h(x))$. Então:
$$DH(\bar{x})(u) = R(Df(\bar{x})u, g(\bar{x}), h(\bar{x})) + R(f(\bar{x}), Dg(\bar{x})u, h(\bar{x})) + R(f(\bar{x}), g(\bar{x}), Dh(\bar{x})u)$$

- Exemplo: $H(x) = \langle x, x\rangle \Rightarrow DH(\bar{x}) = 2(\bar{x}_1 e_1^* + \dots + \bar{x}_n e_n^*)$, onde $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ é a base dual da base canônica.

- Exemplo: $f: \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{e^k} \mathbb{R}$, $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = \bar{x} + tu$, com $\bar{x} \in \Omega$, $u = (u_1, \dots, u_n)$.



$$(f\circ\gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\,\dot{\gamma}_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\,\dot{\gamma}_n(t)$$

$$(f\circ\gamma)''(t) = \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\gamma(t))\, u_i u_j = D^2 f(\gamma(t))(u)^2$$

Aula 33 - 27/11

terça-feira, 8 de dezembro de 2020 13:57

- **Prova** da igualdade entre as derivadas de $2^{\underline{a}}$ ordem qdo. uma delas existe e é contínua no ponto $(0,0)$.

    Ideia: usa o lema $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{R(h,k)}{hk}$, onde $R(h,k) = f(h,k) - f(h,0) - f(0,k) - f(0,0)$

- **Notação de multi-índice** p/ derivadas parciais: $\dfrac{\partial^{|J|} f}{\partial x_J} = \dfrac{\partial^{j_1 + \cdots + j_n} f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}$ $\begin{cases} J = (j_1, \ldots, j_n) \\ |J| = j_1 + \cdots + j_n = k \end{cases}$

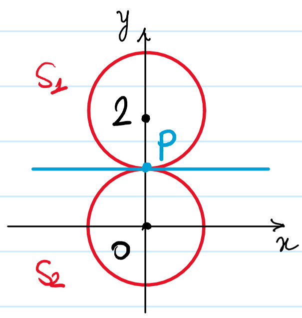
Aula 34 - 30/11

terça-feira, 8 de dezembro de 2020 14:27

- Definição de curva parametrizada C^1 em $S \subset \mathbb{R}^n$
- Definição de vetor tangente a S em $\bar{s}$ e espaço tangente $T_{\bar{s}}S$
- Exemplo: $T_{\bar{s}}S$ qdo. S é um cone $\begin{cases} \bar{s} \neq 0 \Rightarrow \text{plano} \\ \bar{s} = 0 \Rightarrow \text{é o próprio cone!} \end{cases}$
- Como descrever a "parte de cima" C^+ do cone como $Z(g)$, graf. l e Im h
- Pergunta: $C_+ \cup \{(0,0,0)\} = \text{graf } l_1 \Rightarrow l_1$ pode ser C^1?
  $C_+ \cup \{(0,0,0)\} = \text{Im } h_1 \Rightarrow h_1$ pode ser C^1?

  Resposta: sim, como imagem ; não como gráfico.
  Porém, $Dh_1(0)$ não será injetora.

- Exemplo.



$S = S_1 \cup S_2$

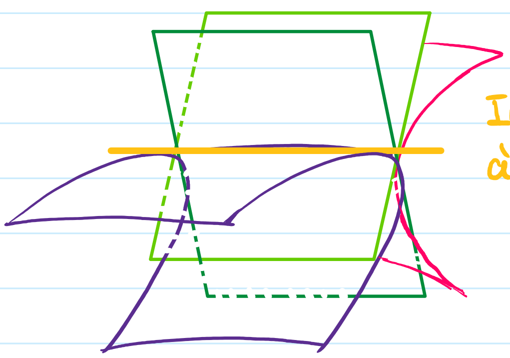
$S = Z(f)$, $f(x,y) = (x^2+y^2-1)(x^2+(y-1)^2-1)^2$

$S_1 \cap S_2 = \{p\}$

$T_pS_1 = T_pS_2$ tem dim. 1, enquanto a intersecção tem dim 0.

Exemplo análogo p/ intersecção de dois cilindros em $\mathbb{R}^3$ ao longo de uma reta.
Além disso, S não tem como ser gráfico de uma função em torno de p.

- Exemplo.



Intersecção dos espaços tangentes às duas superfícies

entre outros...

Aula 35 - 02/12

terça-feira, 8 de dezembro de 2020 17:04

- Sistemas de equações do tipo $f(x)=b$, onde $f: \Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Caso especial: sistema linear $Ax = b$ $\left(f(x) = Ax + c\right) \Rightarrow$ sabemos sobre existência e unicidade

- $Ax = 0$ sempre tem solução

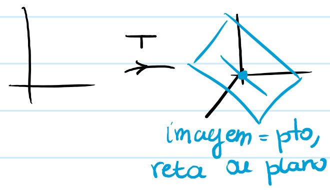
  dim. da imagem = nº de colunas LI da matriz

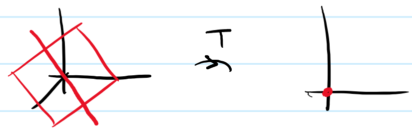
  co-dim. do kernel = nº de linhas LI da matriz

① $n < m$ ② $m = n$ ③ $n > m$

$$\begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$Ae_1 \cdots Ae_n$





kernel é pelo menos uma reta

- Escalonamento provê essas informações

- No caso ②: injetora $\Leftrightarrow$ kernel $= \{0\} \Leftrightarrow$ sobrejetora:

  $f(x) = 0$ tem unicidade de solução $\Leftrightarrow$ $\forall b \in \mathbb{R}^m$, $f(x) = b$ tem alguma solução (existência)

- No caso ③:

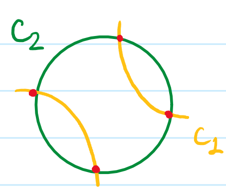
$$m\left\{\begin{bmatrix} \overbrace{A}^{m} & \vdots & \overbrace{C}^{n-m} \end{bmatrix}\right. \begin{bmatrix} x_A \\ \cdots \\ x_C \end{bmatrix}\begin{matrix} \}m \\ \}n-m \end{matrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}\}m \Leftrightarrow A x_A = b - \underset{\text{chute}}{C x_C}$$

$$\begin{cases} \det A \neq 0 \Rightarrow x_A = A^{-1}\overbrace{(b - Cx_C)}^{f(x_C)}\ \forall x_C \\ \qquad \Rightarrow (x_A, x_C) \text{ é solução} \\ \det A = 0 \Rightarrow \text{dependendo do chute } x_C\text{, pode ou não haver solução.} \end{cases}$$

- Exemplo. $\begin{cases} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1, e^{xy}) \end{cases}$ e $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = b_1 & \text{determina } C_1 \\ e^{xy} = b_2 & \text{determina } C_2 \end{cases}$

$b_1 < -1 \Rightarrow C_1 = \emptyset$

$b_1 = -1 \Rightarrow$ única solução é $(0,0)$



- Exemplo: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $b \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=b_1 \\ x^2-y^2=b_2 \end{cases}$

  $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2,\ x^2-y^2)$

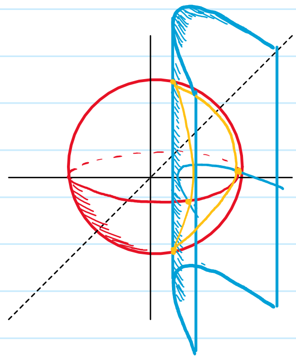
  $b_1<0 \Rightarrow$ ñ tem solução

  $b_1 = 0 \Rightarrow$ só tem solução se $b_2=0$, e é única $(0,0,0)$

  $b_1>0 \Rightarrow$ a 1ª equação define uma esfera

  a 2ª equação define uma fam. de "telhas"

  (cuja dist. determina a existência de soluções)



- Limitações p/ caracterização global das soluções de um sistema não-linear

Aula 36 - 04/12

sábado, 19 de dezembro de 2020 15:40

- Como a diferencial pode dar informações sobre os seguintes conjuntos especiais:

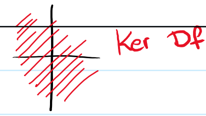
  $\mathrm{Im}(f)$

  $\mathrm{Graf}(f)$, $f : \Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ em torno de $\bar{x} \in \Omega$ fixado

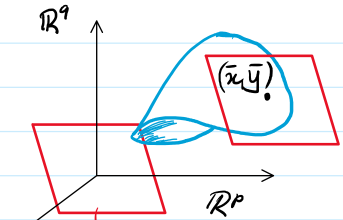
  $Z(f)$

Pergunta. O que pode acontecer com:

$\mathrm{Im}\, Df(\bar{x})$	$p=2,\ q=1,\ f(x) = x_1^3 + x_2^3,\ \bar{x} = (0,0)$
$\mathrm{Graf}\ Df(\bar{x})$	funciona melhor
$Z\, Df(\bar{x}) = \mathrm{Ker}\, Df(\bar{x})$	mesmo exemplo



- Situação 1: $\mathrm{Graf}(f)$ e $\mathrm{Graf}\left(Df(\bar{x})\right) = T_{(\bar{x}, f(\bar{x}))}\mathrm{Graf}(f)$ têm a "mesma dimensão"



$\mathrm{Graf}\ Df(\bar{x}) = T_{(\bar{x}, \bar{y})}\, \mathrm{Graf}\ f$

- Retomando o exemplo do cone, cujos espaços tgs são todo o cone ou $\{0\}$ (parte "de cima")

- Proposição: $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^q$ e $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, f(\bar{x})) \Rightarrow$ o espaço tangente (velocidades das curvas...) é um espaço vetorial de dim p e é o $\mathrm{Graf}\ Df(\bar{x})$

- Comentários:

  $H(x) = (x, f(x)) \Rightarrow JH(\bar{x}) = \begin{bmatrix} I_{p \times p} \\ Jf(\bar{x})_{q \times p} \end{bmatrix}_{(p+q) \times p}$ tem p colunas LI $\Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, DH(\bar{x}) = p$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\, DH(\bar{x}) = \mathrm{Graf}\ Df(\bar{x})$ tem dim. p

Aula 37 - 07/12

sábado, 19 de dezembro de 2020 16:55

- Situação especial: $f:\Omega=\mathring{\Omega}\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^1$ e $\bar{x}\in\Omega$ t.q. $Df(\bar{x})$ é injetiva

  i) $v\in\mathbb{R}^p$, $\gamma(t)=\bar{x}+tv \Rightarrow (f\circ\gamma)'(0)=Df(\bar{x})(v)$

  Obs: $f\circ\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^q$ é uma curva em $S=\text{Im} f$ passando em $\bar{y}=f(\bar{x})$ em $t=0$ com velocidade $Df(\bar{x})(v)$.

  Logo: $Df(\bar{x})(v)\in T_{\bar{y}}S$ (NÃO depende de injetividade)

  Injetividade $\Rightarrow \dim T_{\bar{y}}S \geq p$

  ii)

Pergunta: É possível garantir $=p$?

- Caso especial: $f:\Omega=\mathring{\Omega}\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^1$ e $\bar{x}\in\Omega$ t.q. $f(\bar{x})=0$

  i) Quem é $T_{\bar{x}}Z(f)$?

  $v\in T_{\bar{x}}Z(f)\Rightarrow \exists\ \gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\overset{\mathcal{C}^1}{\to} Z(f)$ com $\gamma(0)=\bar{x}$, $\gamma'(0)=v \Rightarrow Df(\bar{x})(v)=0$

  $\therefore$ $T_{\bar{x}}Z(f)\subset \text{Ker } Df(\bar{x})$

  ii)

Pergunta: Sob que condições vale a igualdade?

- Teorema da função injetora. [Teorema 41.5 do Bartle]

  Hipóteses: $\begin{cases} f:\Omega=\mathring{\Omega}\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \\ \bar{x}\in\Omega \text{ com } Df(\bar{x}):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q \text{ injetora}\end{cases}$

  Tese $\begin{cases} \exists \text{ vizinhança } V \text{ de } \bar{x} \text{ t.q. } f|_V \text{ é injetora} \\ \text{a "induzida" } f|_V:V\to f(V) \text{ tem inversa contínua}\end{cases}$

  Exemplo: $f(x_1,x_2)=(e^{x_1}\cos x_2, e^{x_1}\sin x_2)$ satisfaz às hipóteses em todo ponto mas não é injetora em todo seu domínio

- Aplicação: sistema não-linear

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_p)=\bar{y}_1+\varepsilon_1 \\ \vdots \\ f_q(x_1,\dots,x_p)=\bar{y}_q+\varepsilon_q\end{cases}, \text{ com solução única } \bar{x} \text{ se } \varepsilon_1=\dots=\varepsilon_q=0$$

Se f é $\mathcal{C}^1$ e $Df(\bar{x})$ injetora, então p/ $\|\varepsilon\|$ pequeno temos unicidade de solução perto de $\bar{x}$.

Se variamos $\bar{y}+\varepsilon_k$ em $\text{Im} f$ com $\varepsilon_k\to 0$ as soluções únicas x_k satisfazem $x_k\to\bar{x}$ (problemas inversos: a entrada varia continuamente com a saída?)

- Teorema da função sobrejetora.

  Hipóteses: $\begin{cases} f:\Omega=\mathring{\Omega}\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \\ \bar{x}\in\Omega \text{ com } Df(\bar{x}):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q \text{ sobrejetora}\end{cases}$

  Exemplo. A mesma f de acima satisfaz às hipóteses em todo ponto mas não é sobrejetora, pois $f(x)\neq 0\ \forall x$

  Tese: $\exists\ \alpha, m>0$ t.q. $B_\alpha(\bar{x})\subset\Omega$ e $B_{\frac{\alpha}{2m}}(f(\bar{x}))\subset f(B_\alpha(\bar{x}))$

- Exemplo. Nas condições do teorema, dados um sistema não-linear como acima e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seq. em $\mathbb{R}^q$ com $y_n\to\bar{y}$, p/ n suficientemente gde. $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seq. de soluções com $x_n\to\bar{x}$ (existência de soluções).

- **Teorema da função aberta:**

Hipóteses: $\begin{cases} f:\Omega=\mathring{\Omega}\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \\ Df(x):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q \text{ sobrejetora } \forall x\in\Omega \end{cases}$

Tese: $\mathcal{O}\subset\Omega$ aberto $\Rightarrow f(\mathcal{O})$ é aberto

- **Teorema da função inversa:**

Hipóteses: $\begin{cases} f:\Omega=\mathring{\Omega}\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \\ \bar{x}\in\Omega \text{ com } Df(\bar{x}):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q \text{ bijetora} \end{cases}$

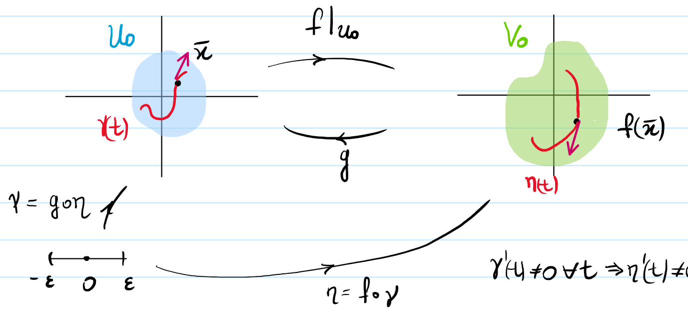
Tese: $\exists$ abertos $\mathcal{U}$ contendo $\bar{x}$, V contendo $\bar{y}=f(\bar{x})$ tais que $f(\mathcal{U})=V$ e $f:\mathcal{U}\to V$ é bijetora com inversa contínua
a inversa $g:V\to\mathcal{U}$ da "induzida" por f é de classe $\mathcal{C}^1$
$Dg(f(x))=[Df(x)]^{-1}$ $\forall x$ em algum $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$

$\boxed{\text{Em particular, } Dg(\bar{y})=[Df(\bar{x})]^{-1}}$

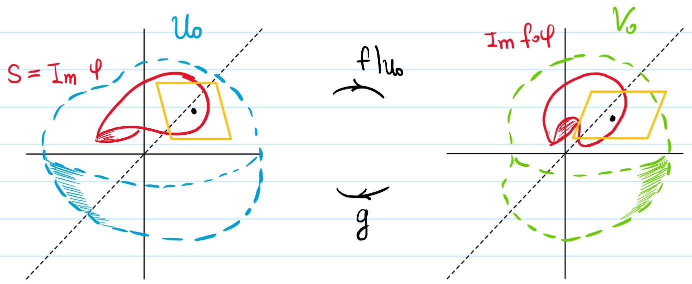
- Exemplo. $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$ tem inversa local $\mathcal{C}^\infty$ (ramos do logaritmo complexo), mas não tem inversa global. A jacobiana dessas inversas locais é:

$$Jg(f(\bar{x},\bar{y}))=e^{-\bar{x}}\begin{bmatrix}\cos\bar{y} & \sin\bar{y}\\ \sin\bar{y} & \cos\bar{y}\end{bmatrix}$$

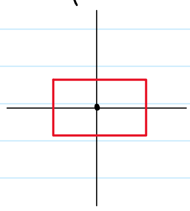
- Geometria: Nas condições do T.F. Inversa



$\gamma'(t)\neq0\ \forall t\Rightarrow\eta'(t)\neq0\ \forall t$



φ (contínua c/ inversa contínua sobre a imagem)



$D\varphi(\bar{u},\bar{v})$ injetora
$Df(\varphi(\bar{u},\bar{v}))$ bijetora

Como $\text{Im}\, D\varphi(\bar{u},\bar{v})\subset T_{\varphi(\bar{u},\bar{v})}S$, $\dim T_{\varphi(\bar{u},\bar{v})}S\geq 2$.
Podemos concluir que é igual?

$\boxed{\text{Ainda não temos nada que garanta isto!}}$

(Nas condições do TF Injetora, a inversa local é apenas contínua, pode não gerar uma curva $\mathcal{C}^1$ no domínio)

- **Teorema da função implícita:**

Hipóteses: $\begin{cases} f : \Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q \text{ de classe } \mathcal{C}^1, \text{ com } (x,y) \mapsto f(x,y) \\ (\bar{x},\bar{y}) \in \Omega \text{ com } f(\bar{x},\bar{y}) = 0 \text{ e } D_2 f(\bar{x},\bar{y}) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q \text{ bijetora} \end{cases}$

Tese: $\exists$ abertos $\mathcal{U}$ contendo $\bar{x}$, V contendo $\bar{y}$ e $\varphi : \mathcal{U} \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ tais que:

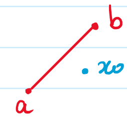
$$(x,y) \in \mathcal{U} \times V \text{ e } f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

Aula 39 - 11/12

terça-feira, 29 de dezembro de 2020 13:34

- Lema [41.3]. $f:\Omega=\mathring{\Omega}\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ de classe C^1 (ou apenas diferenciável)
  $s\subset\Omega$ segmento de extremos $a,b\in\Omega$ e $x_0\in\Omega$. Então:

$$\|f(b)-f(a)-Df(x_0)(b-a)\|\leq\|b-a\|\sup_{x\in s}\|Df(x)-Df(x_0)\|_{\mathcal{L}}$$



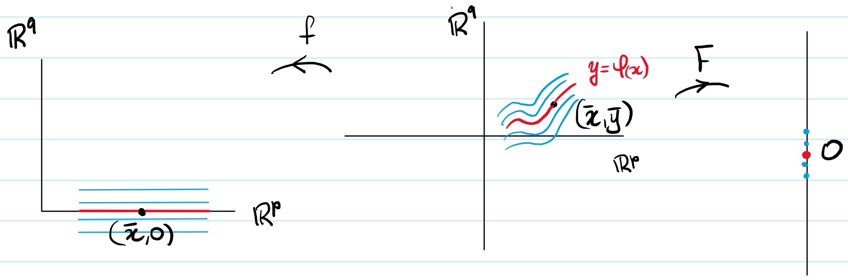
- Ideia de como provar o teorema da função injetora a partir do lema
- Ideia da prova do teorema da função implícita a partir da função inversa

$F:\Omega\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^q$, C^1
$F(\bar{x},\bar{y})=0$ e $D_2F(\bar{x},\bar{y})$ bijetora
$\Rightarrow\exists\, V\times W\subset\Omega$, $\varphi: V\to W$ tais que
$x\in V$, $y=f(x)\Leftrightarrow F(x,y)=0$

$f:\Omega\subset\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$
$f(x,y)=(x,F(x,y))$

$$Jf(x,y)=\left[\begin{array}{c|c} I_{p\times p} & 0 \\ \hline J_1F(x,y) & J_2F(x,y)\end{array}\right]$$

tem det $\neq 0\Rightarrow Df(\bar{x},\bar{y})$ é bijetora

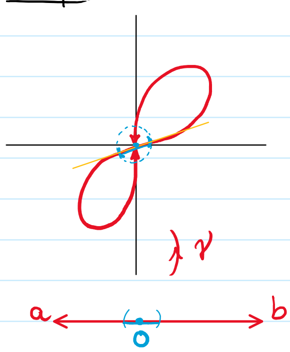


$f(\bar{x},\bar{y})=(\bar{x},0)$, $\varphi(x)=g(x,0)$ (onde g é da função inversa)

- Espaços tangentes: $f:\Omega=\Omega^\circ\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

Conjunto	Espaço tangente
Graf f	$T_{(\bar{x},f(\bar{x}))}\,\text{graf } f=\text{graf } Df(\bar{x})$
$Z(f)$	$Df(\bar{z})$ tem posto máximo $\Rightarrow T_{\bar{z}}Z(f)=\text{Ker } Df(\bar{z})$
Im f	?? (problema abaixo)

- Exemplo



γ injetora, C^1, regular $\left(D\gamma(t)\neq 0\ \forall t\in(a,b)\right)$

Num sentido "local" o espaço tangente à fig 8 em 0 é a reta horizontal
Porém, o conjunto de velocidades permitidas é a união das retas horizontal e vertical!

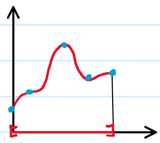
Aula 41 - 16/12

terça-feira, 29 de dezembro de 2020 22:39

- Máximos e mínimos condicionados [multiplicadores de Lagrange] Formulações da mesma pergunta:

①	②
$f: S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^3$
f tem máximo em S?	$f\|_S : S \to \mathbb{R}$ tem máximo?

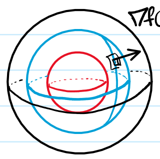
- Algumas informações:
  1) S cpto., f contínua $\Rightarrow \exists$ ptos. de máx/min
  2) Como podemos encontrá-los?



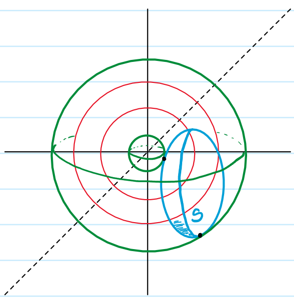
- Recordação: max/min global podem estar nos "extremos" de um intervalo

- $f: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$. Se $\nabla f(x) \neq 0 \ \forall x \in N_c f$, pelo T.F. Implícita este conjunto é uma "hiper-superfície" de nível (de dim. $n-1$)

- $f: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$, $\underbrace{\nabla f(x)}_{} \neq 0$
  ortogonal aos conjuntos de nível, "aponta" p/ onde f cresce

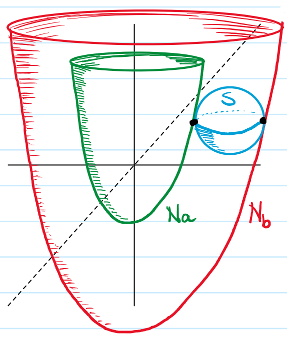


- Exemplo quando S é um parabolóide $\Rightarrow$ os extremos de $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ são encontrados nas "tangências"



- Exemplo: quando S é uma esfera e $f(x) = x_3 - x_1^2 - x_2^2$:

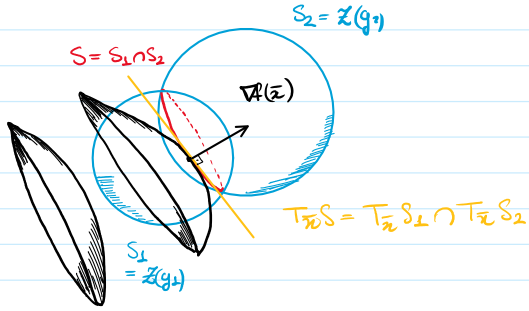
$\min f|_S = a$
$\max f|_S = b$



- Nesses pontos de tangência: $S = Z(g) = N_0(g) \Rightarrow \nabla f$ e ∇g são LD (os máximos e mínimos estão entre tais pontos)

- Caso de interesse: $g \in \mathcal{C}^1$, $S = Z(g)$ com $\nabla g(x) \neq 0 \ \forall x \in S$ (S é $(n-1)$-superfície), $f \in \mathcal{C}^1$ definida num aberto contendo S.
Então, em um ponto de máximo (local ou global) $\bar{x}$ de $f|_S$ tem-se $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x})$
(λ = multiplicador de Lagrange)

• Extensão p/ o caso $S = \mathcal{Z}(g)$, onde $g = (g_1, \dots, g_k)$, com $g_j \in \mathcal{C}^1$ e $\nabla g_1, \dots, \nabla g_k$ L.I.: $\nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\bar{x})$



Aula 42 - 18/12

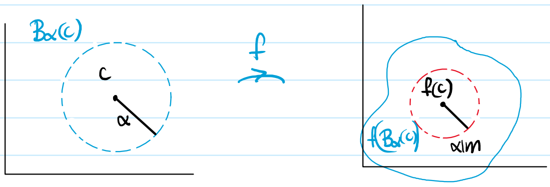
quarta-feira, 30 de dezembro de 2020 22:17

- **Prova do Lema 41.3:** TVM p/ $g(x) = f(x) - Df(x_0)(x)$.

- **Lema da Aproximação** (41.4): $f: \Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ C^1, $x_0 \in \Omega$ e $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.q. $B_\delta(x_0) \subset \Omega$ e, se $x_1, x_2 \in B_\delta(x_0)$ então $\|f(x_1) - f(x_2) - Df(x_0)(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|$.
  Controlar $\sup\limits_{S} \|Df(x) - Df(x_0)\|$ usando que f é C^1

- **Teorema da função injetora**: $Df(c)$ injetora $\Rightarrow \exists\, r > 0$ t.q. $\|Df(c)u\| \geq r\|u\|$ $\forall u \in \mathbb{R}^p$.
  Usamos o lema com $c = x_0$ e $\varepsilon = \frac{r}{2}$. A continuidade da inversa segue dela ser Lipschitz com $\frac{2}{r}$.

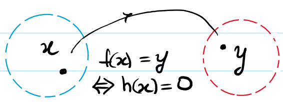
- **Teorema da função sobrejetora:** $Df(c)$ sobrejetora $\Rightarrow \exists\, \alpha > 0, m > 0$ tais que $B_{\frac{\alpha}{m}}(f(c)) \subset f(B_\alpha(c))$



Tomamos $\{u_1, \dots, u_q\}$ LI tais que $Df(c)u_j = e_j$ (base canônica)
Definimos $M: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ por: $M\left(\sum y_j e_j\right) = \sum y_j u_j$ (inversa à direita de $Df(c)$)
Tomamos $m = \left(\sum_{j=1}^{q} \|u_j\|^2\right)^{1/2}$. Note que: $\|M(y)\| \leq m\|y\|$ (Cauchy-Schwartz)

Aplicamos o lema da aproximação com $x_0 = c$ e $\varepsilon = 1/2m$, tomamos $\alpha = \delta$

Nos inspiramos no método de Newton com $h(x) = f(x) - y$, onde $y \in B_{\frac{\alpha}{2m}}(f(c))$ é dado.



Método de Newton:
equivalentes
$h(x) = 0$ (problema de zeros)
$\phi(x) = x - [Dh(x)]^{-1}(h(x))$ (problema de pto fixo $\phi(x) = x$)
Método de Newton modificado:
$\phi(x) = x - [Dh(c)]^{-1}(h(x))$

Construímos a sequência: $x_0 = c$
$$x_1 = x_0 + M(y - f(c)) = x_0 - M(f(x_0) - y) = x_0 - M(h(x_0)) = \phi(x_0)$$

Temos $\begin{cases} \|x_1 - x_0\| \leq \alpha/2 \\ \|x_1 - c\| \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)\alpha \end{cases}$

Definimos: $x_{n+1} = x_n - M(f(x_n) - y)$

Isolando y sucessivamente e aplicando $Df(c)$ à esquerda, temos: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - M\left(f(x_n) - f(x_{n-1}) - Df(c)(x_n - x_{n-1})\right) \\ \|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha/2^{n+1} \\ \|x_{n+1} - c\| \leq \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\alpha \end{cases}$

Concluímos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ao ponto desejado.