Lista 10. Cadeias de Markov tempo contínuo II. (sexta 27/11/2020)

Exercício 1. Escrever as equações de Kolmogorov backward e forward para processo de Poisson com intensidade λ e para o processo de nascimento e morte em geral. Para processos de Poisson conhecemos as probabilidades $P_{ij}(t)$, conferir que eles satisfazem equações backward. O que pode ser dito sobre a medida invariante.

Exercício 2. Considere cadeia com três estados $\{0, 1, 2\}$ e taxas de transição $q_{01} = q_{12} = \lambda$ e $q_{21} = q_{10} = \mu$. Escreve forward e backward para todos $P_{ij}(t)$, $i, j = 0, 1, 2$. A cadeia é reversível? Escreva equações para medida invariante e tenta resolve-las usando balanço detalhado.

Exercício 3. Na aula vimos a relação entre a medida invariante para cadeia de Markov com tempo contínuo e a medida invariante de cadeia embutida dela: $P_i \propto \frac{\pi_i}{v_i}$. Considere a cadeia do item anterior. Construa a cadeia de Markov embutida dela, e verifique a relação entre ela e medida invariante que achou para embutida.

Exercício 4. Suponha seguinte modelo: temos N partículas, cada uma independentemente de outras pode estar em dois estados mecanico-quânticos: estado excitado (mais alta energia) e estado fundamental (energia menor possível). Denotamos os dois estados como 1 (excitado) e 0 (fundamental). Todas as partículas posicionadas em campo de fluxo de energia, por isso, cada partícula que esta em estado 0 transita para estado 1 com a taxa $\lambda, \lambda > 0$ e cada partícula tem a taxa $\mu, \mu > 0$, de transição $1 \to 0$. Seja $X(t)$ número de partículas em estado excitado. Mostre, que $X(t)$ é cadeia de Markov, oferecendo as taxas de transição (q_{ij}) ou em termos (v, P), se preferir. O sistema em equilíbrio deve possuir a distribuição invariante para esse dinâmica. Achar a distribuição invariante. (Dica: sugiro achar invariante pelo balanço detalhado).

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.