Aula 10. Cadeias de Markov com tempo contínuo II. (Exercícios)

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Equações diferencias para probabilidades de transição.

Para cadeia de Markov homogênea $X(t)$ com tempo contínuo seja $P_{ij}(t) = P(X(s+t) = j \mid X(s) = i)$. Já provamos que probabilidades satisfazem as seguintes relações

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t) \ \textit{backward}$$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) q_{kj} - v_j P_{ij}(t) \ \textit{forward}$$

Se existe limite $P_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$, então $P'_{ij}(t) = 0$, e

$$0 = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_j - v_i P_j \ \textit{backward}$$

$$0 = \sum_{k \neq j} P_k q_{kj} - v_j P_j \ \textit{forward}$$

Probabilidades limites para processo de nascimento e morte.

Usando

$$0 = \sum_{k \neq j} P_k q_{kj} - v_j P_j \quad \textit{forward}$$

re-escrevemos como relação de balanço

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} P_k q_{kj} \quad \textit{forward}$$

$$\text{taxa de saída} \; = \; \text{taxa de entrada}$$

obtemos sistema das equações de balanço

Estado	Taxa de saida = taxa de entrada
0	$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$
1	$(\lambda_1 + \mu_1) P_1 = \mu_2 P_2 + \lambda_0 P_0$
2	$(\lambda_2 + \mu_2) P_2 = \mu_3 P_3 + \lambda_1 P_1$
$n, n \geq 1$	$(\lambda_n + \mu_n) P_n = \mu_{n+1} P_{n+1} + \lambda_{n-1} P_{n-1}$

Probabilidades limites para processo de nascimento e morte.
Somando para cada equação a equação precedente obtemos

$$\begin{cases} \lambda_0 P_0 &= \mu_1 P_1 \\ \lambda_1 P_1 &= \mu_2 P_2 \\ \lambda_2 P_2 &= \mu_3 P_3 \\ &\vdots \\ \lambda_n P_n &= \mu_{n+1} P_{n+1}, \ n \geq 0 \end{cases}$$

Solucionando obtemos

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_2\mu_1} P_0$$

A condição $\sum_j P_j = 1$ vai providenciar P_0 :

$$P_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_2\mu_1}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_2\mu_1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\dots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\dots\mu_2\mu_1}\right)^{-1}$$

Daqui podemos ver que a condição necessárias para existência de probabilidades limites é convergência da serie. Pode ser mostrado que essa condição também é condição suficiente.

Equações de balanço detalhado.

Observe, quando resolvemos a equação de balanço global

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} P_k q_{kj} \quad \textit{forward}$$

$$\text{taxa de saída} = \text{taxa de entrada}$$

para nascimento e morte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_0 P_0 & = & \mu_1 P_1 \\ (\lambda_1 + \mu_1) P_1 & = & \mu_2 P_2 + \lambda_0 P_0 \\ (\lambda_2 + \mu_2) P_2 & = & \mu_3 P_3 + \lambda_1 P_1 \\ \cdots & & \\ (\lambda_n + \mu_n) P_n & = & \mu_{n+1} P_{n+1} + \lambda_{n-1} P_{n-1} \\ \cdots & & \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_0 P_0 & = & \mu_1 P_1 \\ \lambda_1 P_1 & = & \mu_2 P_2 \\ \lambda_2 P_2 & = & \mu_3 P_3 \\ \cdots & & \\ \lambda_n P_n & = & \mu_{n+1} P_{n+1} \\ \cdots & & \end{array} \right.$$

podemos observar que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_n P_n & = & \mu_{n+1} P_{n+1} \\ \lambda_{n-1} P_{n-1} & = & \mu_n P_n \end{array} \right. \Rightarrow (\lambda_n + \mu_n) P_n = \mu_{n+1} P_{n+1} + \lambda_{n-1} P_{n-1}$$

Equações de balanço detalhado.

Equações de balanço global:

$$v_j P_j = \sum_{k \neq j} P_k q_{kj}$$

$$P_j \sum_{k \neq j} q_{jk} = \sum_{k \neq j} P_k q_{kj}$$

$$\text{taxa de saída} \;=\; \text{taxa de entrada}$$

Equações de balanço detalhado:

$$P_i q_{ij} = P_j q_{ji} \text{ para todos } i, j.$$

$$\text{balanço detalhado} \Rightarrow \text{ balanço global}$$
$$\not\Leftarrow$$

Observe as condições necessárias quando a cadeia pode satisfazer o balanço detalhado: se $q_{ij} > 0$, então $q_{ji} > 0$ $\forall i, j$.

Cadeia de Markov reversível em tempo. Provavelmente mais fácil explicar o conceito para cadeias de Markov com tempo discreto.

Seja (X_n) uma cadeia de Markov ergódica com as probabilidades de transição (p_{ij}) e distribuição invariante $\pi = (\pi_i)$. Para dado n consideramos uma sequencia em tempo inverso $X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots$. Essa sequencia forma uma cadeia de Markov (provar) com as probabilidades de transição $\tilde{p}_{ij}$ definidos como

$$\tilde{p}_{ij} = P(X_n = j \mid X_{n+1} = i) = \frac{P(X_n = j, X_{n+1} = i)}{P(X_{n+1} = i)}$$
$$= \frac{P(X_n = j)P(X_{n+1} = i \mid X_n = j)}{P(X_{n+1} = i)} = \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i}$$

Se $\tilde{p}_{ij} = p_{ij}$ então a cadeia de Markov chama-se cadeia *reversível em tempo* ou somplezmente *reversível*. A condição pode ser descrita naturalmente em seguinte forma, reconhecemos como *equações de balanço detalhado*:

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \text{ para todos } i, j.$$

Cadeia de Markov reversível em tempo.

Equações de balanço detalhado para cadeia com tempo discreto:

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji} \text{ para todos } i, j.$$

Se para dada matriz de transição (p_{ij}) conseguimos achar o vetor (π_i) que satisfaz essa equação de balanço detalhado, então vetor (π_i) é distribuição estacionária da cadeia, ou seja, satisfaz as equações de balanço global:

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij} \quad \forall j$$

Isso é uma ferramenta comum para achar as distribuições estacionárias.

Cadeia de Markov reversível em tempo contínuo.

Para caso de cadeias de Markov com tempo contínuo podemos definir as cadeias reversíveis em tempo do mesmo modo. Agora (p_{ij}) são as probabilidades de transição para cadeia embutida. Supondo que a cadeia embutida é ergódica, existe então (π_i) a distribuição estacionária (invariante) para essa cadeia. Podemos deduzir (agora intuitivamente) que a distribuição estacionária para cadeia com tempo contínuo deve ter de seguinte forma:

$$P_i = \frac{\pi_i/v_i}{\sum_j \pi_j/v_j}.$$

Realmente, P_i vai ser proporcional a π_i – número medio de vezes quando a cadeia embutida fica em estado i e vezes tempo médio que a cadeia passa neste estado $1/v_i$. O denominador é um termo de normalização: transformar em probabilidades, esses produtos π_i/v_i.

Então é natural esperar que as condições de reversibilidade da cadeia em caso de tempo contínuo devem ser

$$P_i q_{ij} = P_j q_{ji} \text{ para todos } i, j.$$

Exemplo: processo de nascimento e morte ergódico é processo reversível no tempo.

Em caso quando as probabilidades limites (P_j) existem, o sistema das equações para medida invariante oferece as equações de balanço detalhado. Em outras palavras, neste caso o processo de nascimento e morte é processo reversível no tempo.

$$P_i q_{ij} = P_j q_{ji} \text{ para todos } i, j.$$

$$\begin{cases} \lambda_0 P_0 & = & \mu_1 P_1 \\ \lambda_1 P_1 & = & \mu_2 P_2 \\ \lambda_2 P_2 & = & \mu_3 P_3 \\ \dots & & \\ \lambda_n P_n & = & \mu_{n+1} P_{n+1} \\ \dots & & \end{cases}$$

Exemplo 6.18 [Ross].

Supomos que existe n máquinas e um servidos para reparar as máquinas. Cada máquina $i, i = 1, \dots, n$ pode falhar (quebrar) com a taxa λ_i. Se k maquinas estão quebradas, então, supondo que a maquina quebrada vai ser reparada com a taxa μ_i/k. Estado da cadeia é conjunto de maquinas quebradas. Em total temos 2^n estados (incluindo estado vazio). As taxas de transição podem ser descritos agora em seguinte forma

$$q_{(i_1,\dots,i_{k-1}),(i_1,\dots,i_k)} = \lambda_{i_k}, \quad q_{(i_1,\dots,i_k),(i_1,\dots,i_{k-1})} = \mu_{i_k}/k,$$

onde todos os $i_1, \dots, i_k$ são distintos. Escrevemos equação de balanço detalhado para esse processo:

$$P_{(i_1,\dots,i_k)} \frac{\mu_{i_k}}{k} = P_{(i_1,\dots,i_{k-1})} \lambda_{i_k}$$

ou

$$P_{(i_1,\dots,i_k)} = \frac{k\lambda_{i_k}}{\mu_{i_k}} P_{(i_1,\dots,i_{k-1})} = \frac{k\lambda_{i_k}}{\mu_{i_k}} \frac{(k-1)\lambda_{i_{k-1}}}{\mu_{i_{k-1}}} P_{(i_1,\dots,i_{k-2})} = \cdots = k! \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{i_j}}{\mu_{i_j}} P(\emptyset)$$

e

$$P(\emptyset) + \sum P_{(i_1,\dots,i_k)} = 1 \Rightarrow P(\emptyset) = \Big(1 + \sum_{i_1,\dots,i_k} k! \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{i_j}}{\mu_{i_j}}\Big)^{-1}$$

References:

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models.* 9th edition, Academic Press, 2007.