Aula 10. Cadeias de Markov com tempo contínuo II.

Anatoli Iambartsev
IME-USP

Equações diferencias para probabilidades de transição.

Para cadeia de Markov homogênea $X(t)$ com tempo contínuo seja $P_{ij}(t) = P(X(s+t) = j \mid X(s) = i)$. Já provamos que essas probabilidades satisfazem as seguintes relações

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} = v_i, \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h} = v_i p_{ij} =: q_{ij} \quad \text{quando } i \neq j$$

o que em termos de derivada de probabilidades significa:

$$(P_{ii}(0))' = -v_i = -\sum_{j \neq i} q_{ij} \quad \text{e} \quad (P_{ij}(0))' = q_{ij} \quad \text{quando } i \neq j$$

Precisamos achar as derivadas $(P_{ii}(t))', (P_{ij}(t))'$ para qualquer $t > 0$. Usaremos as equações de Kolmogorov-Chapman

$$P_{ij}(t+s) = \sum_k P_{ik}(t) P_{kj}(s) \quad \text{para quaisquer } s, t \geq 0.$$

Equações diferencias para probabilidades de transição.

Precisamos achar limite de incrementos: $P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)$. Para $P_{ij}(t+h)$ usaremos as equações de Kolmogorov-Chapman, mas

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+h) &= \sum_k P_{ik}(t)P_{kj}(h) \quad \text{para quaisquer } h,t \geq 0. \\ &= \sum_k P_{ik}(h)P_{kj}(t) \quad \text{para quaisquer } h,t \geq 0. \end{aligned}$$

As duas abordagens oferecem equações de Kolmogorov diferentes

$$\textit{forward} \text{ usando } P_{ij}(t+h) = \sum_k P_{ik}(t)P_{kj}(h)$$

$$\textit{backward} \text{ usando } P_{ij}(t+h) = \sum_k P_{ik}(h)P_{kj}(t)$$

Equações de Kolmogorov Backward.

Obtemos *backward* usando

$$P_{ij}(t+h) = \sum_k P_{ik}(h) P_{kj}(t)$$

logo

$$\begin{aligned} P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) &= \sum_k P_{ik}(h) P_{kj}(t) - P_{ij}(t) \\ &= \sum_{k \neq i} P_{ik}(h) P_{kj}(t) - \big(1 - P_{ii}(h)\big) P_{ij}(t) \end{aligned}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\sum_{k \neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) - \left[\frac{1 - P_{ii}(h)}{h} \right] P_{ij}(t) \right)$$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

para todos estados i, j e tempo $t \geq 0$.

Cadeia de Markov com dois estados.

Essa cadeia pode ser interpretada em termos de funcionamento de uma maquina. Seja a máquina funciona durante o tempo exponencial com a média $1/\lambda$ depois quebra. O tempo de reparação da maquina também pode ser representada como o tempo exponencial mas com a média $1/\mu$. Seja 0 estado que representa o fato que a maquina esta funcionando e 1 maquina quebrada. Acharemos as probabilidades $P_{ij}(t)$ para essa cadeia como solução das equações de Kolmogorov *backward*.

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

Cadeia de Markov com dois estados.

Notamos que para essa cadeia $v_0 = \lambda,\ v_1 = \mu, p_{01} = 1, p_{10} = 1$ e $q_{01} = \lambda, q_{10} = \mu$. Escrevemos as equações backward para $P_{00}(t)$ e $P_{10}(t)$:

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

$$P'_{00}(t) = q_{01} P_{10}(t) - v_0 P_{00}(t)$$
$$P'_{10}(t) = q_{10} P_{00}(t) - v_1 P_{10}(t)$$

O que dé

$$P'_{00}(t) = \lambda P_{10}(t) - \lambda P_{00}(t)$$
$$P'_{10}(t) = \mu P_{00}(t) - \mu P_{10}(t)$$

para resolver noté que

$$\mu P'_{00}(t) + \lambda P'_{10}(t) = 0$$

o que leva a equação

$$\mu P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t) = const.$$

Agora precisamos de condições iniciais. Supomos que $X(0) = 0$ isso significa que $P_{00}(0) = 1$ e $P_{10}(0) = 0$. Obtemos $const = \mu$

$$\mu P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t) = \mu \quad \Rightarrow \quad \lambda P_{10}(t) = \mu(1 - P_{00}(t))$$

Cadeia de Markov com dois estados.

Voltando para primeira equação $P'_{00}(t) = \lambda P_{10}(t) - \lambda P_{00}(t)$ e lembrando que acabamos de achar a relação $\lambda P_{10}(t) = \mu(1 - P_{00}(t))$ obtemos

$$P'_{00}(t) = \mu(1 - P_{00}(t)) - \lambda P_{00}(t) = \mu - (\mu + \lambda)P_{00}(t).$$

para resolver essa equação usaremos a substituição $h(t) = P_{00}(t) - \mu/(\lambda + \mu)$ que satisfaz a equação

$$h'(t) = -(\lambda + \mu)h(t) \quad \Rightarrow \quad \text{ou} \quad h'(t)/h(t) = -(\lambda + \mu),$$

o que dê a solução $h(t) = Ke^{-(\lambda+\mu)t}$ e $P_{00}(t) = Ke^{-(\lambda+\mu)t} + \mu/(\lambda + \mu)$. Usando condições iniciais $P_{00}(0) = 1$ acharemos K e

$$P_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

e de relação $\lambda P_{10}(t) = \mu(1 - P_{00}(t))$ obtemos $P_{10}(t)$

$$P_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Equações de Kolmogorov Forward.

Obtemos *forward* usando

$$P_{ij}(t+h) = \sum_k P_{ik}(t)P_{kj}(h)$$

logo

$$\begin{aligned}
P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) &= \sum_k P_{ik}(t)P_{kj}(h) - P_{ij}(t) \\
&= \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)P_{kj}(h) - \Big(1 - P_{jj}(h)\Big)P_{ij}(t)
\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\sum_{k\neq j} P_{ik}(t)\frac{P_{kj}(h)}{h} - \left[\frac{1-P_{jj}(h)}{h}\right]P_{ij}(t)\right)$$

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k\neq j} P_{ik}(t)q_{kj} - v_j P_{ij}(t)$$

para todos estados i, j e tempo $t \geq 0$. Se podemos trocar soma e limite: isso não é sempre verdade neste caso.

Probabilidades limites.

Em analogia com cadeias de Markov com tempo discreto podemos tentar achar as probabilidades limites (P_j)

$$P_j := \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$$

supondo que limite existe e não depende de estado inicial i. Para derivar as equações para probabilidade limite usaremos equações de Kolmogorov forward (a equação backward leva a um caso trivial): se limite existe é natural deduzir que a derivada da probabilidade de transição em parte esquerda da equação de Kolmogorov vai para 0. Assim obtemos seguinte equação (assumindo também que podemos trocar limite e soma)

$$0 = \sum_{k\neq j} q_{kj} P_k - v_j P_j, \text{ e } \sum_j P_j = 1.$$

Probabilidades limites.

1. Assumimos que as probabilidades limites existem. As condições suficientes para essa existência, por exemplo, são

   (a) todos os estados são comunicáveis: começando de um estado i existe a probabilidade positiva de atingir estado j, para quaisquer $i, j \in E$ e

   (b) cadeia de Markov é positiva recorrente: começando de qualquer estado o tempo médio de retorno neste estado é finito.

   Se essas condições valem, então probabilidades limites existem e satisfazem equações

   $$0 = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k - v_j P_j, \text{ e } \sum_j P_j = 1.$$

   P_j pode ser interpretada como a fração de tempo que o processo passa em estado j.

Probabilidades limites.

2. Equações $0 = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_k - v_j P_j$, tem uma interpretação:

$$
\begin{aligned}
v_j P_j \quad &:= \quad \text{taxa com qual o processo deixa o estado } j \\
\sum_{k \neq j} P_k q_{kj} \quad &:= \quad \text{taxa com qual o processo entra em estado } j
\end{aligned}
$$

   Assim equações estabelecem a igualdades dessas taxas para cada estado. Por isso as equações chamam as vezes as *equações de balanço (global)*.

3. Quando probabilidades limites existem, falam que a cadeia é *ergódica*. As probabilidade (P_j) chamam também como probabilidades estacionarias.

References:

[Ross] S.Ross. *Introduction to Probability Models.* 9th edition, Academic Press, 2007.