

# Política Fiscal no Modelo Neoclássico de Crescimento

Mauro Rodrigues (USP)

2020

# Introdução

- Entender impacto de política fiscal no modelo neoclássico de crescimento
  - ▶ Sequência de gastos a ser financiada
  - ▶ Conjunto de impostos disponíveis ao governo
- Distorções estáticas e dinâmicas
- Política fiscal ótima: encontrar o conjunto de impostos que minimiza distorções
- Referência:
  - ▶ Ljungqvist and Sargent, 2nd edition, chapters 11 and 15

# Modelo

- Modelo neoclássico de crescimento, sem incerteza
- Horizonte infinito, tempo discreto:  $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$
- Contínuo de agentes idênticos, distribuídos uniformemente no intervalo  $[0, 1]$ 
  - ▶ A cada período recebem renda do capital e do trabalho
  - ▶ Pagam impostos
  - ▶ Utilizam renda líquida de impostos para consumo e investimento
  - ▶ Investimento amplia estoque de capital no futuro
- Firms atuam em concorrência perfeita, operam uma função de produção  $F(k, n)$ 
  - ▶ Retornos constantes de escala, condições de Inada
  - ▶ Contratam capital e trabalho dos agentes

# Modelo

- Governo precisa financiar uma sequência de gastos exógena  $\{g_t\}_{t=0}^{\infty}$
- Dispõe de um conjunto de impostos:  $\{\tau_{ht}, \tau_{nt}, \tau_{kt}, \tau_{ct}\}_{t=0}^{\infty}$ 
  - ▶  $\tau_{ht}$ : imposto lump-sum
  - ▶  $\tau_{nt}$ : alíquota de imposto sobre a renda do trabalho
  - ▶  $\tau_{kt}$ : alíquota de imposto sobre a renda do capital
  - ▶  $\tau_{ct}$ : alíquota de imposto sobre o consumo
- Por simplicidade, impostos incidem apenas sobre consumidores
  - ▶ Poderíamos colocar impostos sobre as firmas sem perda de generalidade
- $\tau_{nt}, \tau_{kt}, \tau_{ct}$ : impostos lineares

# Mercados

- Organização dos mercados: Arrow-Debreu
  - ▶ Trocas ocorrem em  $t = 0$
  - ▶ No período zero, é possível comprar/vender ativos que entregam produto em qualquer período  $t \geq 0$
  - ▶ Possível também contratar serviços de capital e trabalho a serem “entregues” em determinado período  $t$
- $q_t$ : preço de unidade de produto a ser entregue em  $t$ , da perspectiva do período zero
  - ▶ Normalize  $q_0 = 1$
- $w_t$ : salário em  $t$ , em unidades de produto do período  $t$ 
  - ▶  $q_t w_t$ : salário em  $t$ , em unidades de produto do período zero
- $r_t$ : aluguel do capital em  $t$ , em unidades de produto do período  $t$ 
  - ▶  $q_t r_t$ : aluguel do capital em  $t$ , em unidades de produto do período zero

# Preferências e restrições

- Preferências:

$$\mathbb{U} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, \overbrace{l_t}^{1-n_t})$$

- ▶  $u_c > 0, u_\ell > 0, u_{cc} < 0, u_{\ell\ell} < 0, \beta \in [0, 1)$

- Restrição orçamentária do agente representativo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t [(1 + \tau_{c,t})c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t] \leq$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t [(1 - \tau_{k,t})r_t k_t + (1 - \tau_{n,t})w_t n_t - \tau_{h,t}]$$

- ▶ Em que  $q_0 = 1$

# Preferências e restrições

- Restrição orçamentária do governo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t g_t = \sum_{t=0}^{\infty} q_t [\tau_{c,t} c_t + \tau_{n,t} w_t n_t + \tau_{k,t} r_t k_t + \tau_{h,t}]$$

- Restrição de recursos (no período  $t$ ):

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + g_t = F(k_t, n_t)$$

- $k_0 > 0$  dado

## Observação

- Poderíamos, alternativamente, utilizar uma formulação de mercados sequenciais:
  - ▶ A cada período, há mercados de capital, trabalho e de um título de 1 período (preço =  $Q_t$ )
  - ▶ Nesse caso, a dívida do governo aparece de maneira explícita
- Restrição orçamentária (flow) do agente representativo em  $t$  seria:

$$(1 + \tau_{c,t})c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + Q_t b_{t+1} = \\ (1 - \tau_{n,t})w_t n_t + (1 - \tau_{k,t})r_t k_t - \tau_{h,t} + b_t$$

- Restrição orçamentária (flow) do governo:

$$g_t + b_t = \tau_{n,t}w_t n_t + \tau_{k,t}r_t k_t + \tau_{c,t}c_t + \tau_{h,t} + Q_t b_{t+1}$$

- ▶ Em que  $b_t$  é dívida do governo e ativo do setor privado
- Nesse caso, é também necessário impor uma restrição de Ponzi



## Problema do agente

- Problema do agente representativo é dado por:

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - n_t)$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} q_t [(1 + \tau_{c,t})c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t] &\leq \\ \sum_{t=0}^{\infty} q_t [(1 - \tau_{k,t})r_t k_t + (1 - \tau_{n,t})w_t n_t - \tau_{h,t}] & \\ k_0 > 0, \{q_t, r_t, w_t; \tau_{ht}, \tau_{nt}, \tau_{kt}, \tau_{ct}\}_{t=0}^{\infty} &\text{ dados} \end{aligned}$$

- Lagrangeano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - n_t) + \lambda \sum_{t=0}^{\infty} q_t [(1 - \tau_{k,t})r_t k_t + (1 - \tau_{n,t})w_t n_t - \tau_{h,t} \\ - (1 + \tau_{c,t})c_t - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t] \end{aligned}$$

# Problema do agente

- Condições de ótimo:

$$[c_t]: \quad \beta^t u_{c,t} - \lambda q_t (1 + \tau_{c,t}) = 0 \quad (1)$$

$$[n_t]: \quad -\beta^t u_{l,t} + \lambda q_t (1 - \tau_{n,t}) w_t = 0 \quad (2)$$

$$[k_{t+1}]: \quad -\lambda q_t + \lambda q_{t+1} [(1 - \tau_{k,t+1}) r_{t+1} + 1 - \delta] = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_t k_{t+1} = 0 \quad (4)$$

- Da eq. (1):

$$\beta^t u_{c,t} = \lambda q_t (1 + \tau_{ct})$$

Como  $q_0 = 1$ , temos:

$$u_{c,0} = \lambda (1 + \tau_{c,0}) \Rightarrow \lambda = \frac{u_{c,0}}{(1 + \tau_{c,0})} \Rightarrow$$
$$q_t = \frac{\beta^t u_{c,t} / (1 + \tau_{c,t})}{u_{c,0} / (1 + \tau_{c,0})} \quad (5)$$

## Problema do agente

- Dividindo (2) por (1):

$$\frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} = \frac{(1 - \tau_{n,t})}{(1 + \tau_{c,t})} w_t$$

- Substituindo  $q_t$  e  $q_{t+1}$  pela expressão (5) em (3), podemos obter a eq. de Euler

$$\beta^t \frac{u_{c,t}}{(1 + \tau_{c,t})} = \beta^{t+1} \frac{u_{c,t+1}}{(1 + \tau_{c,t+1})} [(1 - \tau_{k,t+1})r_{t+1} + 1 - \delta]$$
$$\frac{u_{c,t}}{(1 + \tau_{c,t})} = \beta \frac{u_{c,t+1}}{(1 + \tau_{c,t+1})} [(1 - \tau_{k,t+1})r_{t+1} + 1 - \delta]$$

- Substituindo (5) em (4), encontramos a condição de transversalidade:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \frac{u_{c,t}}{(1 + \tau_{c,t})} k_{t+1} = 0$$

# Problema da firma

- Problema da firma é dado por:

$$\max_{\{k_t^d, n_t^d\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} q_t \left[ F(k_t^d, n_t^d) - w_t n_t^d - r_t k_t^d \right]$$

- ▶ Dadas as sequências  $\{q_t, w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$
- Condições de primeira ordem:

$$F_k(k_t^d, n_t^d) = r_t$$

$$F_n(k_t^d, n_t^d) = w_t$$

# Equilíbrio Competitivo

Para dadas seqüências de impostos  $\{\tau_{h,t}, \tau_{n,t}, \tau_{k,t}, \tau_{c,t}\}_{t=0}^{\infty}$  e gastos  $\{g_t\}_{t=0}^{\infty}$ , podemos definir um equilíbrio competitivo da seguinte forma

Um **equilíbrio competitivo** é:

- 1 Uma seqüência de alocações  $\{c_t, k_{t+1}, n_t; k_t^d, n_t^d\}_{t=0}^{\infty}$
- 2 Uma seqüência de preços  $\{w_t, r_t, q_t\}_{t=0}^{\infty}$

Tais que:

- Dados  $k_0 > 0$ , preços  $\{w_t, r_t, q_t\}_{t=0}^{\infty}$  e impostos  $\{\tau_{h,t}, \tau_{n,t}, \tau_{k,t}, \tau_{c,t}\}_{t=0}^{\infty}$ ,  $\{c_t, k_{t+1}, n_t\}_{t=0}^{\infty}$  resolve o problema do consumidor representativo
- Dados preços  $\{w_t, r_t, q_t\}_{t=0}^{\infty}$ ,  $\{k_t^d, n_t^d\}_{t=0}^{\infty}$  resolve o problema da firma

# Equilíbrio competitivo

- Mercados em equilíbrio, i.e., para todo  $t \geq 0$ :

$$k_t = k_t^d$$

$$n_t = n_t^d$$

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + g_t = F(k_t, n_t)$$

**Observação:** restrição orçamentária do governo implícita na definição de equilíbrio

Restrição orçamentária  
do consumidor representativo  
+ Restrição de recursos  $\Rightarrow$  Restrição orçamentária  
do governo

# Equilíbrio competitivo

- Usando a restrição orçamentária do agente representativo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t [(1 + \tau_{c,t})c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t] =$$
$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t [(1 - \tau_{k,t})r_t k_t + (1 - \tau_{n,t})w_t n_t - \tau_{h,t}]$$

- Rearranjando:

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} q_t [c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t - w_t n_t - r_t k_t] +$$
$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t [\tau_{c,t}c_t + \tau_{n,t}w_t n_t + \tau_{k,t}r_t k_t + \tau_{h,t}] = 0$$

# Equilíbrio competitivo

- Note que  $F(k_t, n_t) = w_t n_t + r_t k_t$ . Da restrição de recursos:

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + g_t = F(k_t, n_t) = w_t n_t + r_t k_t$$
$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t - w_t n_t - r_t k_t = -g_t$$

- Segue então que:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t g_t = \sum_{t=0}^{\infty} q_t [\tau_{c,t} c_t + \tau_{n,t} w_t n_t + \tau_{k,t} r_t k_t + \tau_{h,t}]$$

que é a restrição orçamentária do governo.



# Equilíbrio competitivo

Portanto, as equações que caracterizam o equilíbrio competitivo são:

1

$$\frac{u_{ct}}{(1 + \tau_{ct})} = \beta \frac{u_{c,t+1}}{(1 + \tau_{c,t+1})} [(1 - \tau_{k,t+1})r_{t+1} + 1 - \delta]$$

2

$$\frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} = \frac{(1 - \tau_{n,t})}{(1 + \tau_{c,t})} F_{n,t}$$

3

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \frac{u_{c,t}}{(1 + \tau_{c,t})} k_{t+1} = 0$$

4

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + g_t = F(k_t, n_t)$$

5 Restrições orçamentárias do consumidor representativo e do governo.

# Alocação eficiente

- Agora obteremos a alocação eficiente, tomando como dada a sequência de gastos  $\{g_t\}_{t=0}^{\infty}$ 
  - ▶ Planejador central não está restrito à estrutura de impostos disponíveis, nem à restrição orçamentária do governo
  - ▶ Depois nos perguntaremos se é possível implementar a solução eficiente com o conjunto de impostos disponíveis
- Problema do planejador central:

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - n_t)$$

s.t.

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + g_t \leq F(k_t, n_t), \quad \forall t \geq 0$$
$$k_0 > 0, \{g_t\}_{t=0}^{\infty} \text{ dados}$$

# Alocação eficiente

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{u(c_t, 1 - n_t) + \mu_t [F(k_t, n_t) - c_t - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t - g_t]\}$$

- Condições de primeira ordem:

$$c_t : \beta^t \{u_{c,t} - \mu_t\} = 0 \Rightarrow u_{c,t} = \mu_t$$

$$n_t : \beta^t \{-u_{l,t} + \mu_t F_{n,t}\} = 0 \Rightarrow u_{l,t} = \mu_t F_{n,t}$$

$$k_{t+1} : -\beta^t \mu_t + \beta^{t+1} \mu_{t+1} \{F_{k,t+1} + 1 - \delta\} = 0 \\ \Rightarrow \mu_t = \beta \mu_{t+1} [F_{k,t+1} + 1 - \delta]$$

- Condição de transversalidade:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \mu_t k_{t+1} = 0$$

# Alocação eficiente

As condições que garantem a alocação eficiente são:

1

$$\frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} = F_{n,t}$$

2

$$u_{c,t} = \beta u_{c,t+1} [F_{k,t+1} + 1 - \delta]$$

3

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + g_t = F(k_t, n_t)$$

4

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t u_{c,t} k_{t+1} = 0$$

# Equilíbrio competitivo

1

$$\frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} = \frac{(1 - \tau_{n,t})}{(1 + \tau_{c,t})} F_{n,t}$$

2

$$\frac{u_{c,t}}{(1 + \tau_{c,t})} = \beta \frac{u_{c,t+1}}{(1 + \tau_{c,t+1})} [(1 - \tau_{k,t+1}) F_{k,t+1} + 1 - \delta]$$

3

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + g_t = F(k_t, n_t)$$

4

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \frac{u_{c,t}}{(1 + \tau_{c,t})} k_{t+1} = 0$$

# Implementação da solução eficiente

- Há sequências de impostos que implementam a solução eficiente?
  - ▶ Fazem com que as eqs. do equilíbrio competitivo sejam iguais às do planejador central
  - ▶ Satisfazem a restrição orçamentária do governo
- A estrutura de impostos é bastante ampla, e permite alcançar a solução eficiente de várias formas:
  - ▶ Impostos lump-sum não distorcem margens
  - ▶ Mas mesmo sem impostos lump-sum, há formas de implementar a solução do planejador central

# Implementação da solução eficiente

- 1 Utilizando apenas impostos lump-sum :  $\tau_{c,t} = \tau_{n,t} = \tau_{k,t} = 0$ ,  
 $\forall t \geq 0 \implies \sum_{t=0}^{\infty} q_t g_t = \sum_{t=0}^{\infty} q_t \tau_{h,t}$ 
  - ▶ Distribuição dos impostos no tempo não importa (dado que satisfaçam a restrição orçamentária do governo)  $\implies$  Equivalência Ricardiana
- 2 Taxar apenas a renda de capital em  $t = 0$  :  $\tau_{c,t} = \tau_{n,t} = 0, \forall t \geq 0$  e  $\tau_{k,t} = 0, \forall t \geq 1$ 
  - ▶  $\sum_{t=0}^{\infty} q_t g_t = \tau_{k,0} r_0 k_0$
- 3 Manter constante a alíquota sobre o consumo:  $\tau_{c,t} = \bar{\tau}_c, \forall t \geq 0$ 
  - ▶ Não taxar capital:  $\tau_{k,t} = 0, \forall t \geq 0$
  - ▶ Impor subsídio sobre a renda do trabalho que compensa exatamente a distorção de  $\bar{\tau}_c$  na margem consumo-lazer
    - ★ Ou imposto sobre a renda no trabalho, e subsídio sobre o consumo para compensar distorção

## Implementação da solução eficiente

$$\frac{u_{c,t}}{(1 + \bar{\tau}_c)} = \beta \frac{u_{c,t+1}}{(1 + \bar{\tau}_c)} [F_{k,t+1} + (1 - \delta)]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \frac{u_{c,t}}{(1 + \bar{\tau}_c)} k_{t+1} = 0$$

$$\frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} = \frac{(1 - \bar{\tau}_n)}{(1 + \bar{\tau}_c)} F_{n,t} \implies \bar{\tau}_n = -\bar{\tau}_c$$

Checar se:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t g_t = \sum_{t=0}^{\infty} q_t [\bar{\tau}_c c_t + \bar{\tau}_n w_t n_t]$$

Em que  $\{q_t, c_t, w_t, n_t\}_{t=0}^{\infty}$  são calculados usando a solução eficiente



# Política fiscal ótima

- Conjunto limitado de impostos
  - ▶ Não há impostos lump-sum
  - ▶ Não há impostos sobre consumo
  - ▶ Alíquota de imposto sobre a renda do capital em  $t = 0$  é dada  $\tau_{k0}$
- Dessa forma, não é possível implementar a solução eficiente
  - ▶ Problema sempre envolve distorções
  - ▶ Política ótima: minimizar essas distorções

# Política fiscal ótima

- **Comprometimento:** governo anuncia em  $t = 0$ , que implementará a sequência de impostos  $\{\tau_{n,t}, \tau_{k,t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ 
  - ▶ Agentes acreditam
  - ▶ Governo cumpre anúncio no futuro
- Agentes tomam suas decisões com base na alíquota anunciada  $\{\tau_{n,t}, \tau_{k,t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ 
  - ▶  $\{\tau_{n,t}, \tau_{k,t+1}\}_{t=0}^{\infty} \Rightarrow$  Equilíbrio competitivo  $\Rightarrow \mathbb{U}$   
 $\{c_t, k_{t+1}, n_t, k_t^d, n_t^d\}_{t=0}^{\infty}$
  - ▶  $\{\tau'_{n,t}, \tau'_{k,t+1}\}_{t=0}^{\infty} \Rightarrow$  Equilíbrio competitivo  $\Rightarrow \mathbb{U}'$   
 $\{c'_t, k'_{t+1}, n'_t, k_t'^d, n_t'^d\}_{t=0}^{\infty}$
- **Problema de Ramsey:** escolher  $\{\tau_{n,t}, \tau_{k,t+1}\}_{t=0}^{\infty}$  que maximiza  $\mathbb{U}$ 
  - ▶ Minimizar distorções geradas pelos impostos
- Resolver indiretamente  $\implies$  Escolher equilíbrio competitivo  $\implies$  Inferir alíquota que levam ao equilíbrio competitivo ótimo

# Política fiscal ótima

- No problema de Ramsey, governo se depara com uma restrição adicional – a **Restrição de Implementabilidade**
- Ela indica que a solução:
  - ▶ Deve ser alcançada com o conjunto limitado de impostos
    - ★ Impostos lineares sobre a renda do capital e do trabalho
    - ★ Não é possível escolher a alíquota sobre a renda do capital em  $t = 0$
  - ▶ Satisfaz restrição orçamentária do governo
  - ▶ Deve induzir um equilíbrio competitivo
- O governo deve respeitar:
  - ▶ Restrição de implementabilidade
  - ▶ Restrição de recursos para todo  $t \geq 0$

# Problema do governo (Problema de Ramsey)

Alocação escolhida deve satisfazer as equações que definem o equilíbrio competitivo (mesmas eqs. derivadas anteriormente, com  $\tau_{c,t} = 0$ ):

- Condições de ótimo do consumidor representativo

$$\frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} = w_t(1 - \tau_{n,t})$$

$$q_t = q_{t+1} [(1 - \tau_{k,t+1})r_{t+1} + 1 - \delta]$$

$$q_t = \beta \frac{u_{c,t}}{u_{c,0}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_t k_{t+1} = 0$$

- Condições de ótimo da firma

$$w_t = F_{n,t}$$

$$r_t = F_{k,t}$$

# Problema do governo (Problema de Ramsey)

- Restrição orçamentária do consumidor

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t [c_t + k_{t+1} + (1 - \delta)k_t] = \sum_{t=0}^{\infty} q_t [(1 - \tau_{n,t})w_t n_t + (1 - \tau_{k,t})r_t k_t]$$

- Restrição orçamentária do governo

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t [\tau_{k,t} r_t k_t + \tau_{n,t} w_t n_t] = \sum_{t=0}^{\infty} q_t g_t$$

- Restrição de recursos

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + g_t = F(k_t, n_t)$$

## Problema do governo (Problema de Ramsey)

- Para derivar a restrição de implementabilidade, combinaremos as equações anteriores (exceto a restrição de recursos)
- Não utilizaremos a restrição orçamentária do governo, pois ela é redundante (supondo restrição orçamentária do agente representativo e restrição de recursos válidas)
- Substituiremos preços e impostos, para obter uma expressão apenas em termos de alocações
- Dadas as alocações ótimas, podemos retornar às eqs. originais e descobrir quais os impostos correspondentes

# Problema do governo (Problema de Ramsey)

- Partindo da restrição orçamentária do agente representativo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t [c_t - (1 - \tau_{n,t})w_t n_t] = \sum_{t=0}^{\infty} q_t \{ [(1 - \tau_{k,t})r_t + 1 - \delta] k_t - k_{t+1} \}$$

- Abrindo o lado direito da igualdade:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} q_t \{ [(1 - \tau_{k,t})r_t + 1 - \delta] k_t - k_{t+1} \} = \\ q_0 [(1 - \tau_{k,0})r_0 + 1 - \delta] k_0 - q_0 k_1 + \\ q_1 [(1 - \tau_{k,1})r_1 + 1 - \delta] k_1 - q_1 k_2 + \\ q_2 [(1 - \tau_{k,2})r_2 + 1 - \delta] k_2 - q_2 k_3 + \\ \vdots \end{aligned}$$

## Problema do governo (Problema de Ramsey)

- Rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} q_t \{ [(1 - \tau_{k,t})r_t + 1 - \delta] k_t - k_{t+1} \} = \\ q_0 [(1 - \tau_{k,0})r_0 + 1 - \delta] k_0 + \\ \underbrace{[q_1 [(1 - \tau_{k,1})r_1 + 1 - \delta] - q_0] k_1}_{=0} + \\ \underbrace{[q_2 [(1 - \tau_{k,2})r_2 + 1 - \delta] - q_1] k_2}_{=0} + \dots \\ - \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} q_t k_{t+1}}_{=0} \end{aligned}$$

- Portanto:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \{ [(1 - \tau_{k,t})r_t + 1 - \delta] k_t - k_{t+1} \} = \underbrace{q_0}_1 \left[ (1 - \tau_{k,0}) \underbrace{r_0}_{F_{k,0}} + 1 - \delta \right] k_0$$



# Problema do governo (Problema de Ramsey)

- Logo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t [c_t - (1 - \tau_{n,t})w_t n_t] = [(1 - \tau_{k,0})F_{k,0} + 1 - \delta] k_0 \Leftrightarrow$$
$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{\beta^t u_{c,t}}{u_{c,0}} \left[ c_t - \frac{u_{l,t}}{u_{c,t}} n_t \right] = [(1 - \tau_{k,0})F_{k,0} + 1 - \delta] k_0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u_{c,t} c_t - u_{l,t} n_t] = u_{c,0} [(1 - \tau_{k,0})F_{k,0} + 1 - \delta] k_0$$

Restrição de Implementabilidade

- Restrição de implementabilidade envolve apenas alocações
  - ▶ Única exceção é a alíquota sobre a renda do capital em  $t = 0$ , que não pode ser alterada pelo governo

# Problema de Ramsey

- Problema de Ramsey: maximizar utilidade do agente representativo ao longo da vida, tendo como restrições:
  - ▶ Restrição de implementabilidade
  - ▶ Restrição de recursos em todo  $t \geq 0$
  - ▶  $\tau_{k,0}, k_0, \{g_t\}_{t=0}^{\infty}$  dados
- Formalmente:

$$\max_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - n_t)$$

s.t.

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (u_{c,t} c_t - u_{l,t} n_t) = u_{c,0} [(1 - \tau_{k,0}) F_{k,0} + 1 - \delta] k_0$$

$$c_t + k_{t+1} - (1 - \delta) k_t + g_t = F(k_t, n_t), \forall t \geq 0$$

$$k_0 > 0, \tau_{k,0}, \{g_t\}_{t=0}^{\infty} \text{ dados}$$

# Problema de Ramsey

- Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ u(c_t, 1 - n_t) + \lambda_t [F(k_t, n_t) - c_t - k_{t+1}] + (1 - \delta)k_t - g_t \} \\ + \mu \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (u_{c_t} c_t - u_{l_t} n_t) - u_{c,0} [(1 - \tau_{k,0})F_{k,0} + 1 - \delta] k_0 \right]$$

- Reescrevendo:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{ \overbrace{[u(c_t, 1 - n_t) + \mu u_{c,t} c_t - \mu u_{l,t} n_t]}^{W(c_t, n_t, \mu)} \\ + \lambda_t [F(k_t, n_t) - c_t - k_{t+1} + (1 - \delta)k_t - g_t] \\ - \mu u_{c,0} [(1 - \tau_{k,0})F_{k,0} + 1 - \delta] k_0 \}$$

- ▶ Em que  $W(c_t, n_t, \mu) = u(c_t, 1 - n_t) + \mu u_{c,t} c_t - \mu u_{l,t} n_t$

# Problema de Ramsey

- Condições de primeira ordem (para  $t \geq 1$ ):

$$c_t : \beta^t \{W_{c,t} - \lambda_t\} = 0$$

$$n_t : \beta^t \{W_{n,t} + \lambda_t F_{n,t}\} = 0$$

$$k_{t+1} : -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} \{F_{k,t+1} + 1 - \delta\} = 0$$

- Segue portanto que:

$$W_{c,t} = \lambda_t$$

$$W_{c,t} = \beta W_{c,t+1} \{F_{k,t+1} + 1 - \delta\}$$

# Política ótima

- Suponha que exista um estado estacionário:  $c_t = c, n_t = n, k_t = k$ , constantes no tempo. Portanto  $W_{c,t} = W_c$ .
- A política ótima implica então que, no longo prazo:

$$1 = \beta \{F_k + 1 - \delta\}$$

- Compare com a eq. de Euler do equilíbrio competitivo:

$$u_{c,t} = \beta u_{c,t+1} \{(1 - \tau_{k,t+1})F_{k,t+1} + 1 - \delta\}$$

que em estado estacionário corresponde a:

$$1 = \beta \{(1 - \tau_k)F_k + 1 - \delta\}$$

# Política ótima

- Para encontrar a alíquota de imposto que implementa a solução de Ramsey, escolha  $\tau_k$  que faz com as duas equações coincidam em estado estacionário
- Isso implica que, no longo prazo, a alíquota de imposto sobre a renda do capital será igual a zero:

$$\tau_k = 0$$

## Caso particular

- No caso particular em que a utilidade é separável entre consumo e lazer, e CRRA com relação ao consumo, é possível ir além:

$$u(c, 1 - n) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + v(1 - n), \quad v'(\cdot) > 0, \quad v''(\cdot) < 0$$

- Nesse caso:

$$\begin{aligned} W(c, n, \mu) &= u(c, 1 - n) + \mu u_c c - \mu u_l n = \\ &= \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + v(1 - n) + \mu c^{-\gamma} c + \mu v'(1 - n)n \\ &= \left[ \frac{1}{1-\gamma} + \mu \right] c^{1-\gamma} + v(1 - n) + \mu v'(1 - n)n \end{aligned}$$

- Portanto:

$$W_c = [1 + \mu(1 - \gamma)] c^{-\gamma}$$

## Caso particular

- Da solução do problema de Ramsey, a política ótima implica que:

$$W_{c,t} = \beta W_{c,t+1} \{F_{k,t+1} + 1 - \delta\}, \forall t \geq 1$$

- Nessa parametrização, isso corresponde a:

$$[1 + \mu(1 - \gamma)] c_t^{-\gamma} = \beta [1 + \mu(1 - \gamma)] c_{t+1}^{-\gamma} (F_{k,t+1} + 1 - \delta), \forall t \geq 1$$

$$c_t^{-\gamma} = \beta c_{t+1}^{-\gamma} (F_{k,t+1} + 1 - \delta), \forall t \geq 1$$

- Da eq. de Euler do equilíbrio competitivo:

$$c_t^{-\gamma} = \beta c_{t+1}^{-\gamma} [(1 - \tau_{k,t+1}) F_{k,t+1} + 1 - \delta]$$

- A política ótima então implica que:

$$\tau_{k,t+1} = 0, \forall t \geq 1 \text{ ou } \tau_{k,t} = 0, \forall t \geq 2$$