Todo conjunto com medida de Lebesgue não nula contém um conjunto não mensurável - MAT0234 Medida e Integração

Prof. Jorge Adrian Beloqui

1 Todo conjunto com medida de Lebesgue não nula contém um conjunto não mensurável

Definição 1.1. Se $A \subset \mathbb{R}^p$ seu conjunto diferença é dado por

$$A \ominus A = \{x - y \mid x, y \in A\}$$

Observe que, se $A \subset B \Rightarrow A \ominus A \subset B \ominus B$

Lema 1. *Seja $K \subset \mathbb{R}^p$ um compacto com $\mu(K) > 0$. Então $K \ominus K$ contém uma bola aberta com centro $0 \in \mathbb{R}^p$.*

Demonstração. Como $0 < \mu(K) < \infty$ (porquê?) então existe um aberto G com $K \subset G$ e $\mu(G) < 2\mu(K)$. Como K é compacto e G^c é fechado, temos que $\delta = \text{dist}(K, G^c) > 0$. Portanto, se x tem $\|x\| < \delta \Rightarrow x \oplus K \subset G$. Assim $K \cup (x \oplus K) \subset G$. Afirmamos que $(x \oplus K) \cap K \neq \emptyset$. Porque senão, dado que $(x \oplus K) \cap K = \emptyset$, por aditividade e invariância por translação, $2\mu(K) = \mu(K) + \mu(x \oplus K) = \mu(K \cup (x \oplus K)) \leq \mu(G) < 2\mu(K)$ para todo x com $\|x\| < \delta$, uma contradição. Logo, $(x \oplus K) \cap K \neq \emptyset$ para todo x com $\|x\| < \delta$. Ou seja, dado $x \in B(0, \delta)$ existem $k_1, k_2 \in K$ tais que $x = k_1 - k_2 \in K \ominus K$. Ou seja, $K \ominus K$ contém $B(0, \delta)$. □

Lema 2. *Seja $E \subset \mathbb{R}^p$ Lebesgue mensurável com $\mu(E) > 0$. Então $E \ominus E$ contém uma bola de centro 0.*

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$, seja $E_n = \{x \in E \mid \|x\| < n\}$. Como $\mu(E) > 0$ existe n_0 com $\mu(E_{n_0}) > 0$. Logo $0 < \mu(E_{n_0}) < \infty$. Logo pela regularidade de μ existe um compacto $K \subset E_{n_0}$ cuja medida verifica $0 < \frac{1}{2}\mu(E_{n_0}) < \mu(K)$. Como $K \subset E$ então $K \ominus K \subset E \ominus E$. Como $K \ominus K$ contém uma bola de centro 0, $E \ominus E$ deve contê-la também. □

Lembramos agora do conjunto não-mensurável que mostramos. Ele é chamado de V, conjunto de Vitali (1905). Seja $V_i = r_i \oplus V$ para alguma enumeração dos racionais r_i.

Teorema 3. *Seja $E \subset \mathbb{R}^p$ com $\mu(E) > 0$, então E contém um conjunto não mensurável.*

Demonstração. Sabemos que V é não mensurável, logo V_i também o é. Mas podia ser que $E_i = E \cap E_i$ fosse mensurável. Se isto acontecesse para E_i com $\mu(E_i) > 0$ então $E_i \ominus E_i$ deveria conter uma bola. Neste caso, como $E_i \subset V_i \Rightarrow V_i \ominus V_i = V \ominus V$ também conteria uma bola. Mas isto é impossível, porque V contém um ponto de cada classe de equivalência. E se $x \neq 0 \in B(0, r) \subset V \ominus V$ então $x = v_1 - v_2$ para todo $x \in B(0, r)$. Tomamos $x \in B(0, r) \cap Q^P$ e isto significa que $v_1 = v_2 + x \in V$ (absurdo por construção de V). Mostramos assim que se E_i é mensurável então $\mu(E_i) = 0$. Se isto acontecer para todo i como $E = \cup_i E \cap V_i = \cup E_i$, teríamos $\mu(E) = 0$, mas por hipótese $\mu(E) > 0$. Portanto algum E_i não é mensurável. □

2 Conjuntos de Lebesgue e Borelianos

Anteriormente construímos o Conjunto de Cantor (ou ternário de Cantor) e a função de Cantor $\varphi : C \to [0.1]$. Ela é contínua e não decrescente. Sabemos que $\mu(C) = 0$. Definamos $F : [0,1] \to [0,2]$ por $F(x) = \varphi + x$.
Como F é soma de duas funções contínuas, uma estritamente não decrescente e a outra estritamente crescente, segue que F é crescente e contínua. Também é sobrejetora e sua inversa F^{-1} existe e é contínua. Ou seja, F é um homeomorfismo entre [0,1] e [0,2].
F leva cada intervalo de [0,1] - C num intervalo de igual medida em [0,2]. Ou seja, $\mu(F([0,1] - C)) = 1$ e também $\mu(F(C)) = 1$.
Portanto o homeomorfismo F leva C, de medida zero, num conjunto de medida 1. Observamos que se $B \subset [0,1]$ for um boreliano, então $F(B)$ e $F^{-1}(B)$ são borelianos.
Proposição: há conjuntos mensuráveis Lebesgue que não são borelianos.
Demonstração: como F(C) tem medida positiva, ele contém um conjunto E não mensurável. Logo $G = F^{-1}(E) \subset C$. E portanto tem medida nula e é mensurável Lebesgue.
Mas G não pode ser boreliano porque senão $E = F(G)$ seria boreliano e portanto mensurável. (contradição).
Observe também que G é um conjunto mensurável Lebesgue cuja imagem por um homeomorfismo não é mensurável Lebesgue.
Assim, apesar de que um homeomorfismo sempre leva boreliano em boreliano, ele pode levar um conjunto mensurável Lebesgue num conjunto não mensurável Lebesgue.
Proposição: A cardinalidade dos Conjuntos mensuráveis Lebesgue é $\aleph_2$.
Demonstração: com efeito como C é não enumerável, e tem medida zero, todo subconjunto dele é mensurável Lebesgue. E
$Card(C) = c < Card(\wp(C)) = \aleph_2$.

3 Temas que seguem

Outros temas que seguem:

1. Teorema de Vitali que da uma condição necessária e suficiente para convergência de uma sequência de funções em Lp.

2. suponhamos que $G(x) = \int_{[0,x]} f d\mu$. Quando vale $G'(x) = f(x)$, $G(b) - G(a) = \int_{[a,b]} f d\mu$?

3. seja agora λ uma "carga", ou seja $\lambda : \mathcal{A} \to \bar{R}$ que verifica:

   (a) $\lambda(\emptyset) = 0$

   (b) λ é σ-aditiva
   Então existem 2 medidas $\mu_1; \mu_2$ para as quais $\lambda = \mu_1 - \mu_2$
   Observação: para fazer sentido, λ não pode tomar os dois valores $+\infty$ e $-\infty$.

4. Teorema de Radon Nikodym: se ν for uma medida absolutamente contínua a respeito de λ (ou seja, $\lambda(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$) então existe φ com $\nu(B) = \int_B \varphi \, d\lambda; \forall\, B \in \mathcal{A}$.