

TEORIA DA PREFERÊNCIA DE ESTADO

Profa. Maria Paula Vieira Cicogna

COPELAND, T.; WESTON, J.; SHASTRI, K. Financial Theory and Corporate Policy. Reading, Addison-Wesley, 1988 – cap. 4

Preferência de Estados

“Nessa formulação, os objetos de escolha não são medidas estatísticas derivadas da distribuição de probabilidade das oportunidades de consumo, mas sim reivindicações de consumo contingente definidas na forma extensiva” (J. Hirshleifer, 1964. Efficient Allocation Capital in na Uncertain World. American Economic Review, p. 80)

Decisões de investimento de indivíduos e empresas são ligadas pela oferta e demanda de títulos (ativos) no mercado de capitais

**Empresas tomam capital emprestado para investir em ativos reais pela venda de títulos;
Indivíduos obtêm direitos sobre os ativos reais das firmas ao comprar os títulos**

Títulos são oportunidades para mudanças intertemporais do consumo por meio do financiamento de atividades produtivas

As decisões de consumo e investimento individuais, que determinam a oferta de títulos, são ambas afetadas pelos preços dos títulos \Rightarrow pelo equacionamento da oferta e da demanda, os preços dos títulos levam à um conjunto consistente de decisões de investimento de firmas e indivíduos

Vamos definir o problema geral da tomada de decisão sobre os portfólios: escolha ótima de investir em mais de um ativo de risco \Rightarrow escolher uma distribuição de probabilidade da riqueza no final do período consistente com o conjunto de ativos de risco disponíveis e com a riqueza inicial do indivíduo

O problema da escolha individual é encontrar um portfólio ou uma combinação linear dos ativos de risco que seja ótima, dada sua riqueza inicial e preferências

Vamos assumir que o mercado de capitais é perfeito (não há custos de transação)

Preferência de Estados

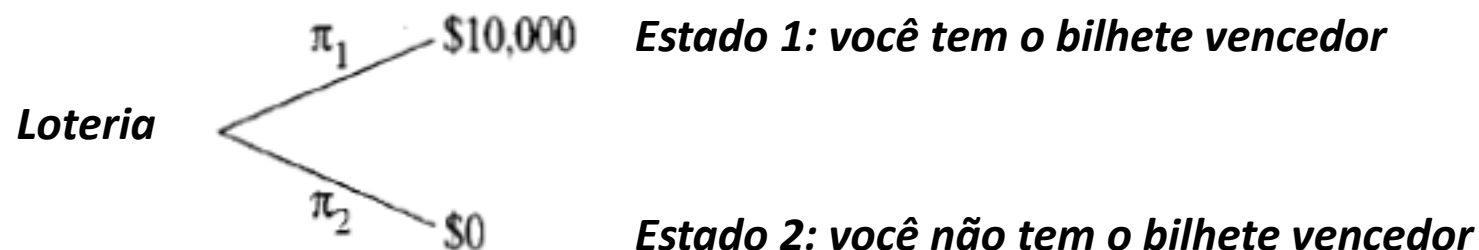
Do ponto de vista da firma que emite o título e dos investidores, o valor futuro incerto de um título pode ser representado por um vetor de retornos prováveis em alguma data futura; o portfólio individual de investimentos é uma matriz de possíveis resultados dos diferentes ativos que compõem o portfólio

No modelo de preferência de estado, a incerteza significa que não se sabe qual estado da natureza ocorrerá em uma data futura

Para o investidor, um ativo é um conjunto de possíveis resultados (*payoffs*), cada qual associado com um estado da natureza mutuamente excludente \Rightarrow uma vez que o estado incerto é revelado, o resultado do ativo é exatamente determinado

Um ativo representa um direito sobre um vetor ou um agrupamento de resultados de estados contingentes

Exemplo simples: há duas possibilidades de resultados com probabilidades π_1 e π_2 , que representam, portanto, dois estados da natureza mutuamente excludentes. Considere o investimento em uma loteria com resultados (\$10.000, \$0). Com probabilidade π_1 , o estado 1 ocorre e a loteria paga \$10.000; com probabilidade $\pi_2 = 1 - \pi_1$, o estado 2 ocorre e a loteria para \$0. Assim:



Incerteza e Estados Futuros Alternativos

A probabilidade de ocorrer um estado da natureza é igual à probabilidade de ocorrer o respectivo retorno do ativo no final do período

- ✓ Os estados da natureza capturam as causas fundamentais da incerteza econômica, por exemplo: guerra e paz; prosperidade e depressão

Uma vez que o estado da natureza é conhecido, o retorno do final do período de cada ativo também é conhecido

⇒ a riqueza individual e agregada do final do período também é conhecida

Pode haver um número infinito de estados da natureza e, portanto, um número infinito de resultados no final do período para um ativo de risco. As seguintes propriedades devem ocorrer:

- ⇒ O conjunto de estados deve cumprir as propriedades de serem mutuamente excludentes e exaustivos: apenas um estado da natureza deve ser realizado no final do período e a soma das probabilidades individuais dos estados da natureza deve ser igual a 1
- ⇒ Indivíduos podem associar um resultado da distribuição de probabilidade de cada ativo ao retorno do resultado do final do período com cada estado da natureza que pode ocorrer
- ⇒ Indivíduos estão preocupados apenas com o montante de riqueza que terão se um dado estado ocorrer
- ⇒ Uma vez que a riqueza é conhecida, os indivíduos são indiferentes ao estado da natureza que ocorreu: indivíduos possuem funções utilidade independente do estado

Definição de Títulos (Ativos) Puros

Um título (ativo) puro ou primitivo é definido como um ativo que paga \$1 no final do período, dada a ocorrência de um dado estado, e \$0, caso contrário

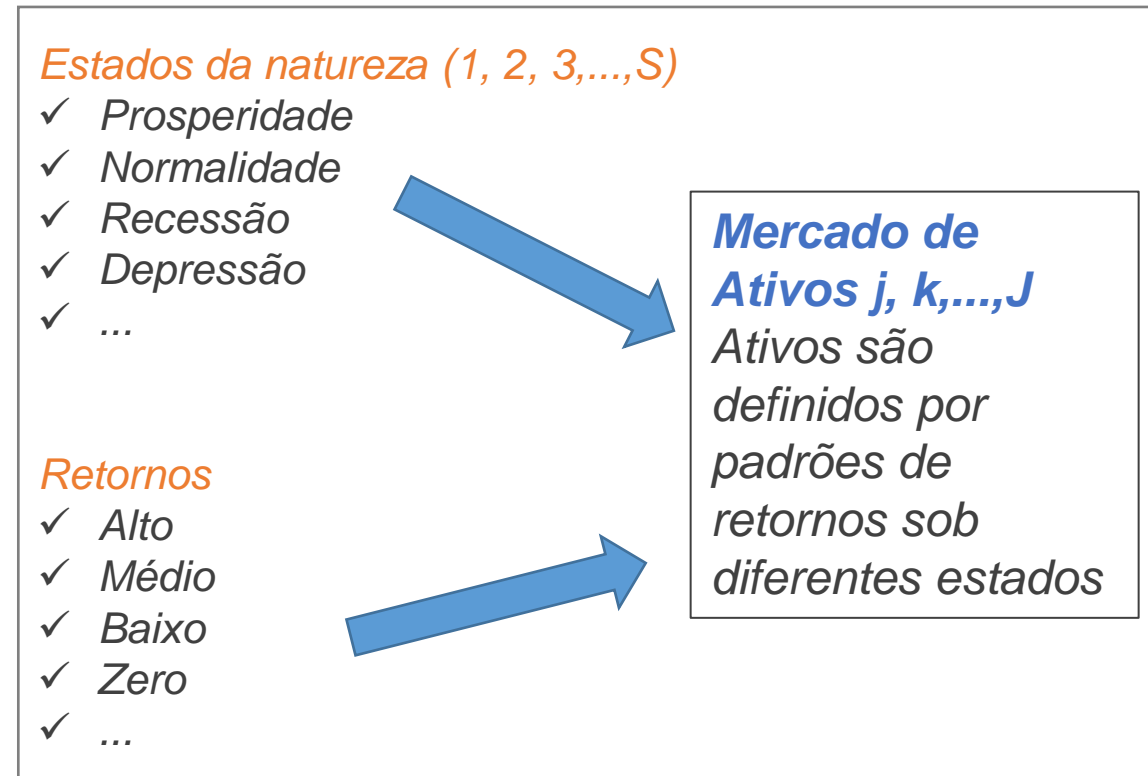
O conceito de título (ativo) puro permite a decomposição do mercado de títulos em portfólios de títulos puros: todo mercado de títulos pode ser considerado uma combinação de vários títulos puros

Para a Teoria da Preferência de Estados, um título representa uma posição em relação a cada possível futuro da natureza

Considere o exemplo ao lado, em que os mercados de títulos são definidos de acordo com as características de seus retornos sob cada estado futuro alternativo

O mercado de ativos consiste, portanto, em um conjunto de características de retornos distribuídas sobre os estados da natureza

A complexidade de um ativo pode variar de várias características de retornos em muitos estados até um único retorno para um único estado da natureza



Mercado de Capitais Completo

A incerteza em relação aos valores futuros dos ativos é representada pelo conjunto de possíveis retornos contingente aos estados

Combinações lineares desse conjunto de retornos estado-contingente de um ativo representam um conjunto de oportunidades do indivíduo de retornos de uma carteira (portfolio) estado-contingente

Para isso, o mercado deve ser completo!

Quando o número de ativos únicos linearmente independente é igual ao número total de alternativas de estados futuros da natureza, o mercado é dito ser completo

Considere caso de 3 estados da natureza. Suponha que existam: (i) ativo livre de risco com retorno $(1,1,1)$, (ii) um seguro-desemprego com retorno $(1,0,0)$ e (iii) um título de dívida com retorno $(0,1,1)$, mas não podem ser negociados outros títulos nesse mercado

⇒ Temos 3 ativos e 3 estados da natureza, mas o mercado não é completo porque o retorno do ativo livre de risco é a soma dos retornos dos outros ativos: os três ativos não são linearmente independentes

Se o mercado é incompleto, então não é possível construir o retorno de qualquer ativo à partir de uma carteira existente de ativos

⇒ No exemplo: o retorno do ativo $(0,1,0)$ não pode ser obtido pelos retornos $(1,1,1)$, $(1,0,0)$ e $(0,1,1)$

Os ativos existentes terão preços bem definidos, mas qualquer novo ativo possível não pode ser criado à partir dos ativos existentes e, por isso, não terá um preço único

Mercado de Capitais Completo

⇒ Suponha que um novo ativo com retorno (0,1,3) foi incluído no mercado: há 3 ativos com retornos estado-contingente linearmente independentes, logo, mercado é completo

Assumindo que o mercado é completo, qualquer padrão de retorno pode ser criado

Em particular, um conjunto completo de títulos puros com retornos (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,1) pode ser criado como uma combinação linear dos ativos existentes.

⇒ Se (1,0,0), (0,1,1) e (0,1,3) estão disponíveis, então a matriz de retornos estado-contingente é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

⇒ Seja X_{ij} o montante do j -ésimo ativo comprado para formar o i -ésimo ativo puro e seja X a matriz formada por X_{ij} . Então, queremos que:

$$XA = I \quad \text{where} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Logo: } \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$$

No exemplo:
$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Portanto:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Objetivo de encontrar A^{-1} : obter o direcionamento para formar o portfolio com retornos dos ativos puros

- ✓ Para obter (1,0,0): comprar o ativo com esse padrão de retorno
- ✓ Para obter (0,1,0): comprar 3/2 de (0,1,1) e vender à descoberto 1/2 de (0,1,3)
- ✓ Para obter (0,0,1): vender à descoberto 1/2 de (0,1,1) e comprar 1/2 de (0,1,3)

Mercado de Capitais Completo

Dado um mercado completo de ativos, podemos (teoricamente) reduzir a incerteza a zero \Rightarrow não faz diferença qual estado futuro da natureza irá ocorrer

Se a riqueza for dividida da maneira correta entre os ativos disponíveis, é possível construir um portfólio equivalente a manter montantes iguais de todos os ativos puros. Esse portfólio tem o mesmo retorno em todos os estados mesmo que os retornos dos ativos individuais sejam diferentes entre os estados

PREÇO DOS ATIVOS PUROS

Dados os vetores de retornos dos estados-contingentes, tanto do mercado de ativos, quanto dos ativos puros, queremos desenvolver a relação entre os preços do mercado de ativos e dos ativos puros em um mercado de capitais perfeito e completo

Para isso, vamos usar a notação:

p_s = preços dos ativos puros

p_j = preços do mercado de ativos

π_s = probabilidades dos estados: crenças dos indivíduos sobre as probabilidades de ocorrência de cada estado

Q_s = número de ativos puros

Preço dos Ativos Puros

Vamos começar com uma analogia: a empresa Varejão vende dois tipos de cestas de maçãs e bananas:

- ✓ *Cesta 1: 10 bananas e 20 maçãs* \Rightarrow preço: \$8
- ✓ *Cesta 2: 30 bananas e 10 maçãs* \Rightarrow preço: \$9

Podemos calcular o preço das maçãs (denotadas por A) e da bananas (B) utilizando os preços das cestas. Sendo a quantidade de maçãs denotada por Q_{jA} e de bananas Q_{jB} , de cada uma das cestas $j = 1,2$, podemos escrever que:

$$p_1 = p_A Q_{1A} + p_B Q_{1B}, \quad p_2 = p_A Q_{2A} + p_B Q_{2B}.$$

Em que: p_A e p_B são os preços de cada maçã e de cada banana, respectivamente

$$\$8 = p_A 20 + p_B 10, \text{ (a)} \quad \$9 = p_A 10 + p_B 30.$$

Substituindo os valores de cada cesta em cada equação, temos:

Logo: $p_A = \$0,30$ e $p_B = \$0,20$

Preço dos Ativos Puros

Dado que conhecemos os preços do mercado de ativos, podemos aplicar a mesma análise ao problema de determinar implicitamente os preços dos ativos puros

Lembre-se que um ativo puro paga \$1 se um estado específico ocorrer e \$0 caso contrário

Qualquer ativo individual é similar a uma cesta mista de bens relativamente a estados futuros da natureza alternativos

Considere os resultados dos ativos no mercado de capitais dados por:

Ativo	Estado 1	Estado 2	Preço no Mercado de Ativos
j	\$10	\$20	$p_j = \$8$
k	\$30	\$10	$p_k = \$9$

As equações para determinar os preços dos dois ativos puros relacionados à situação descrita na tabela são:

$$p_1 Q_{j1} + p_2 Q_{j2} = p_j,$$

$$p_1 Q_{k1} + p_2 Q_{k2} = p_k,$$



p_1 e p_2 são os preços dos ativos puros que estão embutidos nos ativos j e k no mercado de títulos, cujos preços são determinados de acordo com seus resultados esperados nos estados 1 e 2

Q_{j1} : quantidade de ativo puro que paga \$1 no estado 1, incluído no ativo j

Preço dos Ativos Puros

Substituindo os valores da tabela anterior nas equações dos ativos j e k, obtemos:

$$p_1 10 + p_2 20 = \$8,$$

$$p_1 30 + p_2 10 = \$9,$$

$$p_1 = \$.20, \quad p_2 = \$.30.$$

$p_1 = \$0,20$ e $p_2 = \$0,30$ são os preços dos dois ativos puros, não os preços dos ativos de mercado j e k
Os ativos j e k representam portfólios de ativos puros!

Qualquer ativo de mercado resulta em diferentes retornos para diferentes estados, mas sob condições apropriadas, os preços de mercado dos ativos permitem que sejam determinados os preços dos ativos puros

⇒ Para o ativo puro 1: é necessário pagar \$0,20 para um ganho garantido de \$1 se o estado 1 ocorrer e \$0, caso contrário

O conceito de ativo puro é útil para propósitos analíticos, assim como para fornecer uma descrição simples da incerteza em análises financeiras

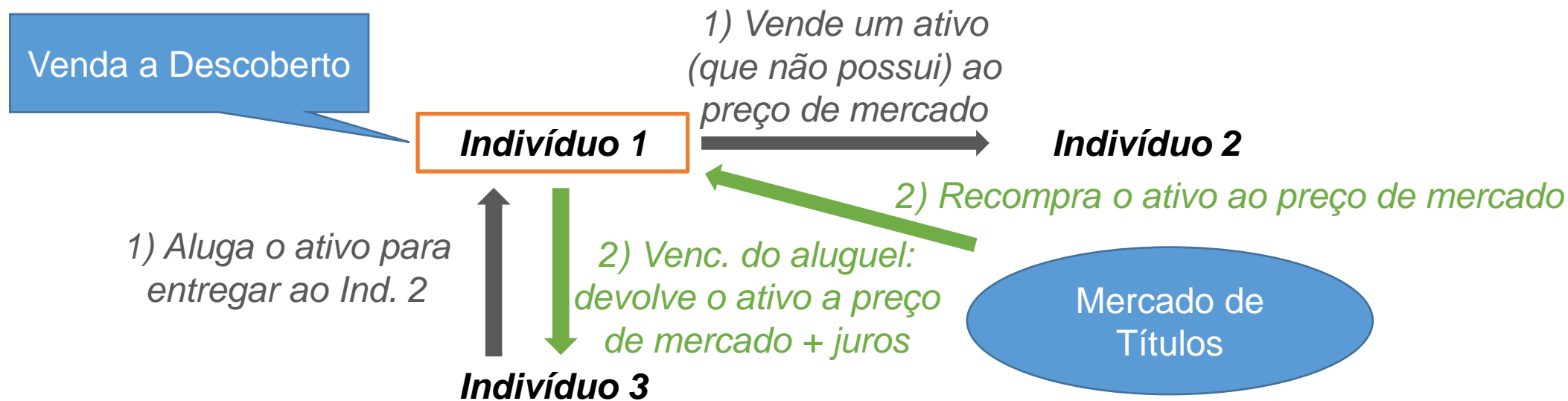
Condição de Não Arbitragem

O equilíbrio no mercado de capitais requer que os preços sejam definidos de forma que a oferta de ativos seja igual à demanda

⇒ *No contexto da teoria da preferência de estados, a condição necessária é: equilíbrio de mercado requer que quaisquer dois ativos ou portfólios com os mesmos vetores de resultados estado contingentes tenham o mesmo preço: Lei do Preço Único*

⇒ Caso Lei do Preço Único não for observada, um indivíduo pode comprar o ativo ou o portfólio a preço menos e vender seu ativo ou portfólio a um preço maior, obtendo lucro sem risco (arbitragem)

Venda a descoberto: venda de um ativo sem ter o ativo. Para isso:



- ✓ Se o preço de mercado caiu entre a data das duas operações: lucro com a operação de venda a descoberto
- ✓ Se o preço de mercado subiu: prejuízo com a operação de venda a descoberto

Condição de Não Arbitragem

Se a venda a descoberto for permitida, é necessário ter uma segunda condição para o equilíbrio de mercado: ausência de qualquer oportunidade de arbitragem de ganho sem risco

- Quando dois portfólios (A e B) são vendidos a preços diferentes, em que $p_A > p_B$, mas possuem vetores de resultados estado contingente idênticos, o investidor irá vender o portfólio A (preço mais alto) e comprar o portfólio B (preço menor) simultaneamente: **ganho sem risco = $p_A - p_B$**
- Fluxo de caixa positivo no início do período representa uma oportunidade de arbitragem de lucro sem risco
- Como todos os investidores preferem mais riqueza do que menos, essa operação será feita por todos os investidores, tornando a oportunidade de arbitragem inconsistente com o equilíbrio de mercado

Em um mercado de capitais completo e perfeito, qualquer vetor de resultados de um ativo pode ser replicado por um portfólio de ativos puros

Quando a venda a descoberto é permitida, a condição de não arbitragem requer que o preço de mercado do ativo seja igual ao preço de qualquer combinação linear dos ativos puros que replicam o vetor de resultados do ativo de mercado

Determinantes Econômicos dos Preços dos Ativos

Vamos focar nos fatores que determinam o preço individual dos ativos puros uma vez que um ativo de mercado sempre pode ser replicado pela combinação de ativos puros

O preço dos ativos puros é determinado pela negociação entre os indivíduos e dependem de 3 fatores:

1. *Preferência temporal de consumo e produtividade do capital;*
2. *Expectativas em relação à probabilidade de um determinado estado ocorrer; e*
3. *Atitude perante o risco, dada a variabilidade da riqueza agregada ao final do período entre os estados.*

Preferência Temporal de Consumo e Produtividade do Capital

⇒ O ativo livre de risco pode ser sempre construído em um mercado de capitais completo por meio de um portfolio composto por um ativo puro em cada estado: resultado desse portfolio é livre de risco porque \$1 será pago independentemente de qual estado é realizado

No caso de 3 estados, o preço do portfolio livre de risco é a soma dos preços dos 3 ativos puros, como, por exemplo: $p_1 + p_2 + p_3 = \$0,8$, o que é o valor presente de \$1 no final do período, descontado pela taxa livre de risco r_f , ou seja:

$$\frac{\$1}{(1 + r_f)} = \sum p_s$$



- Se o valor do dinheiro no tempo for positivo, a taxa de juros livre de risco é positiva
- O valor da taxa de juros livre de risco reflete as preferências temporais de consumo e a produtividade do capital ⇒ um dos determinantes do preço de um ativo puro é taxa de desconto de mercado com certeza no final do período

Determinantes Econômicos dos Preços dos Ativos

Expectativas em relação à probabilidade de um determinado estado ocorrer

Crença individual em relação à probabilidade de ocorrência de diferentes estados: **probabilidade de estado (π_s)**

Probabilidades de estado podem divergir: diferenças nos preços dos ativos

- ⇒ Vamos considerar que os indivíduos concordam em relação às probabilidades de estado relativas: **expectativas homogêneas**, um conjunto de probabilidades de estado bem definidas conhecido por todos os agentes de mercado
- ⇒ O preço de um ativo puro estado-contingente (p_s) pode ser decomposto em sua probabilidade de estado, π_s , e no preço de que ocorra o resultado esperado de \$1 contingente ao estado s , θ_s , logo: **$p_s = \pi_s \cdot \theta_s$** ⇒ Isso implica que podemos decompor o resultado esperado no final do período no resultado esperado de \$1 e na probabilidade do estado s
- ⇒ Mesmo quando os preços contingentes de ocorrer um estado particular s é o mesmo entre os estados ($\theta_s = \theta_t$, para todo s e t), os preços dos ativos puros irão diferir uma vez que as probabilidades de ocorrência dos estados não são idênticas ($\pi_s \neq \pi_t$, para todo s e t)

Uma forma útil de compreender esse ponto é reconhecer que o preço de um ativo puro é igual ao seu resultado no final do período descontado a valor presente pela sua taxa de retorno esperado:

$$p_s = \frac{\$1 \cdot \pi_s}{1 + E(R_s)}$$
$$0 < p_s < 1$$

Retorno esperado do ativo puro:

$$E(R_s) = \frac{\$1 \cdot \pi_s}{p_s} - 1 = \frac{\$1}{\theta_s} - 1$$
$$0 < \theta_s < 1$$

Se os resultados esperados variam, as taxas de retorno esperadas serão as mesmas apenas quando os preços dos ativos puros variarem de forma proporcional às probabilidades de estado

Determinantes Econômicos dos Preços dos Ativos

Atitude perante o risco quando há variação da riqueza agregada entre estados

Assumindo que os indivíduos são avessos ao risco, eles diversificam pelo investimento em alguns ativos puros para garantir que não vão perder riqueza apesar do estado realizado

Se os preços θ_s dos resultados esperados de \$1 contingente à ocorrência de um dado estado é o mesmo para todos os estados (taxa de retorno esperada é a mesma) \Rightarrow cada indivíduo avesso ao risco irá investir em um igual número de ativos puros para eliminar toda a incerteza sobre sua riqueza futura

Considere o exemplo:

- \Rightarrow A riqueza no final do período pode ser 1, 2 ou 3 milhões, dependendo da ocorrência dos estados depressão, normal ou próspero. O investidor médio irá manter um portfolio com vetor de resultados na forma $(x, 2x, 3x)$
- \Rightarrow Como os indivíduos são avessos ao risco, os resultados financeiros são melhor avaliados em estados que possuem relativamente menos riqueza (estado 1 no exemplo)

Para que as pessoas sejam induzidas a aceitar mais risco, os preços dos ativos puros devem ser ajustados para tornar o ativo do estado 1 relativamente mais caro e o ativo do estado 3 relativamente mais barato: para aumentar a demanda pelos ativos do estado 3, os preços devem se ajustar às menores expectativas de retorno dos ativos no estado 1 e aumentar o retorno esperado dos ativos no estado 3

Investidores não iriam querer manter direitos sobre estados com a mesma riqueza agregada porque isso significa carregar risco que pode ser diversificado, não havendo motivo para esperar uma recompensa por carregar o **risco diversificável** \Rightarrow **é a expectativa de um retorno esperado maior do portfolio que induz indivíduos avessos ao risco a carregar o risco não diversificável**

Determinantes Econômicos dos Preços dos Ativos

Como a riqueza agregada é igual à soma dos resultados de todos os ativos de mercado \Rightarrow é também o resultado sobre o portfólio de mercado

Ativos com resultados estado-contingentes positivamente relacionados aos resultados estado-contingentes do portfólio de mercado, envolvem carregar o risco não diversificável: possuem maiores taxas de retorno esperados do que ativos que possuem resultados esperados negativamente (ou pouco) relacionados aos resultados do portfólio de mercado, que envolvem pouco risco não diversificável

Assim, o preço de um ativo puro pode ser decomposto como:

$$p_s = \pi_s \theta_s = \frac{\$1 \pi_s}{1 + E(R_s)} = \left[\frac{\$1}{1 + r_f} \right] \pi_s \left[\frac{1 + r_f}{1 + E(R_s)} \right]$$
$$= \left[\frac{\$1}{1 + r_f} \right] \pi_s \left[1 - \frac{E(R_s) - r_f}{1 + E(R_s)} \right], \text{ sendo: } E(R_s) \geq r_f.$$

Note que: se indivíduos são avessos ao risco, o valor esperado da taxa de retorno de todos os ativos será igual à taxa de juros livre de risco e o fator de ajuste do risco é igual a 1

1º fator: valor de \$1 descontado a valor presente pela taxa livre de risco, multiplicado por:

2º fator: probabilidade do resultado

3º fator: ajuste do risco

Decisões Ótimas de Portfolios


Podemos escrever a utilidade esperada da riqueza no final do período como: $\sum \pi_s \cdot U(Q_s)$, em que Q_s = número de ativos puros que pagam \$1 sem o estado s ocorrer $\Rightarrow Q_s$ representa o número de ativos puros do estado s que o indivíduo compra, assim como sua riqueza no final do período se o estado s ocorrer

Considere o problema: quanto gastar da nossa riqueza inicial, W_0 , em consumo corrente, C , e qual portfolio manter para consumo futuro, que pode ser escrito como:

$$\max \left[u(C) + \sum_s \pi_s U(Q_s) \right]$$

Sujeito a:

$$\sum_s p_s Q_s + \$IC = W_0.$$



Queremos maximizar nossa utilidade esperada do consumo corrente e futuro, sujeito à nossa restrição de riqueza inicial
Nossa decisão de portfolio consiste nas escolhas que fazemos para Q_s (número de ativos puros que compramos para cada estado s)

- ✓ Note que não há desconto explícito para utilidade futura: qualquer desconto está absorvido pela forma funcional $U(Q_s)$
- ✓ p_s inclui uma taxa de desconto de mercado implícita
- ✓ Não há necessidade para formar expectativa sobre $u(C)$, uma vez que não há incerteza sobre o consumo corrente

Decisões Ótimas de Portfolios

Para resolver o problema da maximização da utilidade, sujeito à restrição da riqueza inicial, vamos usar os multiplicadores de Lagrange:

$$L = u(C) + \sum_s \pi_s U(Q_s) - \lambda \left(\sum_s p_s Q_s + \$1C - W_0 \right),$$

Neste problema, o multiplicador de Lagrange λ é a medida do quanto nossa utilidade pode aumentar se nos riqueza inicial aumentasse em \$1 (preço sombra para o relaxamento da restrição)

Para resolver o problema, as condições de primeira ordem (CPO) são (assumimos que as condições de segunda ordem para o problema de maximização são válidas):

$$\frac{\partial L}{\partial C} = u'(C) - \$1\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = \pi_1 U'(Q_1) - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \left(\sum_s p_s Q_s + \$1C - W_0 \right) = 0.$$

Ao resolver o sistema formado pelas CPO, encontramos a alocação ótima entre os ativos puros

Decisões Ótimas de Portfolios

Exemplo: considere um investidor com função utilidade da riqueza logarítmica e riqueza inicial de \$10.000. Assuma que há dois estados em que os preços dos ativos puros são \$0,40 e \$0,60, com probabilidades 1/3 e 2/3, respectivamente.

A função de Lagrange é: $L = \ln C + \frac{1}{3} \ln Q_1 + \frac{2}{3} \ln Q_2 - \lambda(.4Q_1 + .6Q_2 + C - 10,000)$,

As CPOs são: $\frac{\partial L}{\partial C} = \frac{1}{C} - \lambda = 0$, que implica: $C = \frac{1}{\lambda}$, (a)

$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = \frac{1}{3Q_1} - .4\lambda = 0$, que implica: $Q_1 = \frac{1}{1.2\lambda}$, (b)

$\frac{\partial L}{\partial Q_2} = \frac{2}{3Q_2} - .6\lambda = 0$, que implica: $Q_2 = \frac{1}{.9\lambda}$, (c)

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10,000 - C - .4Q_1 - .6Q_2 = 0$. (d)

Substituindo (a), (b) e (c) em (d), temos: $\frac{1}{\lambda} + \frac{.4}{1.2\lambda} + \frac{.6}{.9\lambda} = 10,000$,

Multiplicando por λ : $1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 10,000\lambda$,

Logo: $\lambda = \frac{1}{5000}$

Substituindo λ nas equações, temos que o consumo ótimo e as escolhas de investimento são:

✓ $C = \$5.000$

✓ $Q_1 = 4.166,7$

✓ $Q_2 = 5.555,5$

O investidor divide sua riqueza igualmente entre consumo corrente e futuro (taxa de juros livre de risco igual a zero)

Investidor compra mais do ativo puro 2: taxa de retorno esperada no estado 2 é maior, mas ainda investe no ativo puro 1, uma vez que é avesso ao risco

Conjunto Eficiente com Dois Ativos de Risco

Em um mercado de capitais completo podem ser observadas diversas condições importantes para o portfolio ótimo

Essas condições são observadas para a maximização de qualquer função utilidade esperada de um investidor avesso ao risco

⇒ Sejam as CPOs do problema da decisão ótima de portfolios dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial C} = u'(C) - \$1\lambda = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial Q_t} = \pi_t U'(Q_t) - \lambda p_t = 0,$$



Reescrevendo as equações em termos de λ e eliminado λ ⇒ temos dois conjuntos de condições para a otimização de portfolios:

$$\frac{\pi_t U'(Q_t)}{u'(C)} = \frac{p_t}{\$1} \quad \text{e} \quad \frac{\pi_t U'(Q_t)}{\pi_s U'(Q_s)} = \frac{p_t}{p_s}$$

Para quaisquer estados s e t .

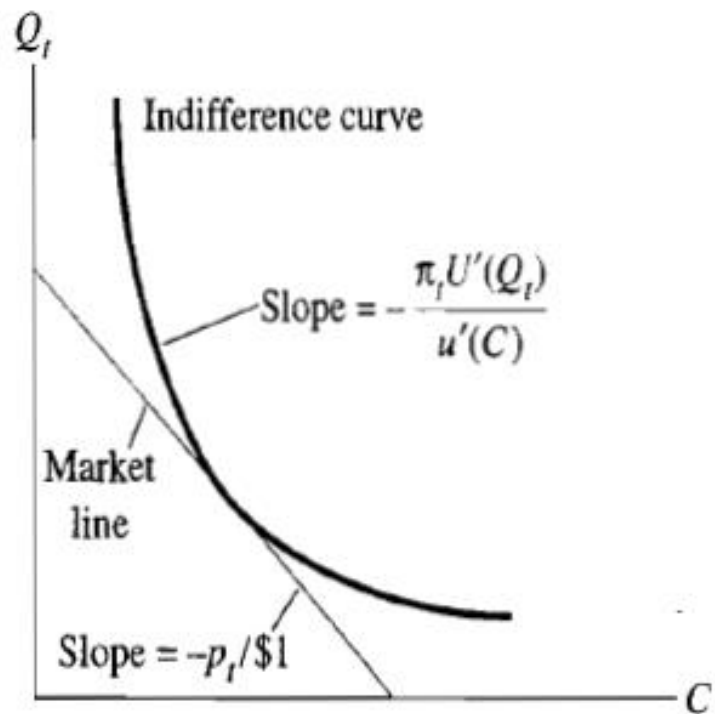
Em ambos os casos, a alocação ótima da riqueza representa escolher entre C e Q_s : a taxa das utilidades marginais esperadas é igual à taxa dos preços de mercado de C e Q_s

O consumo ótimo e as escolhas de investimento envolvem pontos de escolha sobre várias curvas de indiferença (curvas de utilidade esperada constante), que são tangentes às linhas de mercado associadas a cada curva

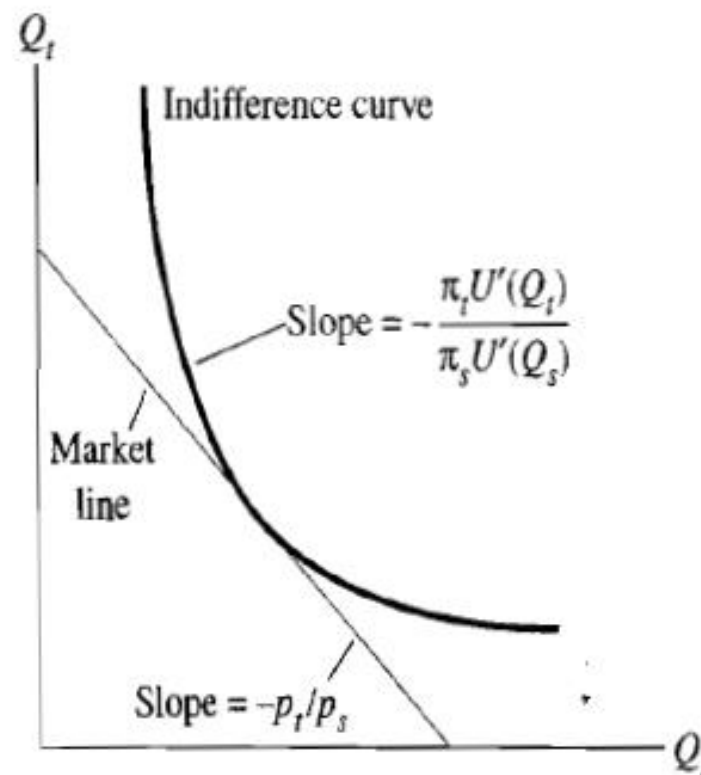
Conjunto Eficiente com Dois Ativos de Risco

O consumo ótimo e as escolhas de investimento envolvem pontos de escolha sobre várias curvas de indiferença (curvas de utilidade esperada constante), que são tangentes às linhas de mercado associadas a cada curva

É equivalente a escolher entre os pesos de consumo e investimento de forma que a inclinação da curva de indiferença (definida como o negativo das taxas marginais de substituição) representa o consumo corrente e o consumo futuro no estado t...



...ou significa que os consumos contingentes futuros no estado t são iguais à inclinação das respectivas linhas de mercado, que representam mudanças nas taxas de trocas ($-p_t/p_s$)



Conjunto Eficiente com Dois Ativos de Risco

$$\frac{\pi_t U'(Q_t)}{u'(C)} = \frac{p_t}{\$1} \quad \text{e} \quad \frac{\pi_s U'(Q_s)}{\pi_s U'(Q_s)} = \frac{p_s}{p_s}$$

Uma forma alternativa de colocar as condições de ótimo dos portfólios é dizer que:

Utilidade marginal esperada da riqueza no estado s , dividida pelo preço do ativo puro no estado s , deve ser igual entre todos os estados e essa taxa também deve ser igual à utilidade marginal do consumo corrente

Se a utilidade marginal esperada pelo preço do ativo puro for maior em um estado e menor em outro \Rightarrow a utilidade esperada não foi maximizada

- \Rightarrow Devemos aumentar o investimento no ativo de maior utilidade marginal esperada e diminuir o investimento com menor utilidade marginal esperada, de forma a reduzir a utilidade marginal esperada mais elevada e aumentar a utilidade marginal esperada mais baixa, dado que a utilidade marginal esperada de um indivíduo avesso ao risco diminui com a riqueza (função crescente com rendimentos decrescentes)*
- \Rightarrow Esse movimento ocorre até que as condições de ótimo sejam satisfeitas e não há formas de aumentar a utilidade esperada*

Condição de Separação de Portfolio

Ocorre quando as escolhas de portfolio sobre ativos de risco são independentes da riqueza individual

Sob a separação de portfolio, investidores escolhem entre poucos portfólios básicos de ativos de mercado \Rightarrow nesta condição, ter um mercado completo não é tão relevante, entretanto é necessário restrições adicionais sobre as preferências do investidor ou sobre a distribuição dos retornos dos ativos

Conjunto Eficiente com Dois Ativos de Risco

Condição de Separação de Portfolio

Para distribuições arbitrárias dos retornos dos ativos, as *funções utilidade com a propriedade de tolerância ao risco linear levam à separação do portfolio*

A tolerância ao risco da função utilidade é a recíproca da medida de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt (Cap. 03), ou seja, *uma função utilidade com tolerância ao risco linear pode ser expressa como uma função linear da riqueza*

Sendo a medida de aversão ao risco absoluta dada por: $ARA = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$, então, a tolerância é o inverso dessa medida, ou seja: $1/ARA = -U'(W)/U''(W)$

Se a tolerância ao risco é linear em relação à riqueza, podemos escrever:

$$-\frac{U'(W)}{U''(W)} = a + bW$$

Se os investidores tiverem expectativas homogêneas sobre as probabilidades dos estados e todos os investidores tiverem a mesma inclinação de sua tolerância ao risco \Rightarrow há separação de dois fundos, onde todos os investidores combinam os dois portfolios básicos

Funções utilidade que possuem tolerância ao risco linear são: quadrática, logarítmica, função de Friend e Blume (1975) (função poderosa de utilidade), dentre outras

Conjunto Eficiente com Dois Ativos de Risco

Condição de Separação de Portfolio

Quando o mercado de capitais é incompleto, os indivíduos são limitados em suas escolhas de padrões de resultados estado-contingentes aos padrões que podem ser construídos como uma combinação linear dos ativos existentes de mercado

Entretanto, com a separação de portfolio, investidores frequentemente encontrarão que oportunidades de resultados não factíveis não seriam escolhidas mesmo que fossem factíveis \Rightarrow decisões de portfolio não são afetadas pelo fato do mercado ser completo ou não

A separação do portfolio depende da forma da função utilidade dos indivíduos e da forma da distribuição dos retornos dos ativos

- No caso especial em que a função utilidade da riqueza é quadrática ou os retornos são conjuntamente normalmente distribuídos, a separação do portfolio é verificada
- Com a adição de expectativas homogêneas, a separação do portfolio fornece condição suficiente para a equação de preço dos ativos, que pode ser escrita em função das médias e variâncias dos ativos: modelo de apreçamento dos ativos de capital (*Capital Asset Pricing Model* – CAPM...que será visto em detalhes mais adiante nos cursos de Finanças)


Separação de Fisher e Decisões Ótimas de Investimento

Na Teoria da Preferência de Estados:

- ✓ Indivíduos poupam quando compram títulos das firmas e as firmas obtêm recursos para investir emitindo títulos;
- ✓ Títulos são definidos como resultados condicionais ou incondicionais em relação às alternativas dos estados futuros da natureza;
- ✓ Todas as decisões de indivíduos e firmas são tomadas e todas as negociações são feitas no início do período;
- ✓ Consumidores maximizam a utilidade esperada do consumo corrente e futuro e são caracterizados pela sua dotação inicial (riqueza) e suas preferências;
- ✓ Firmas são caracterizadas pelas funções de produção, que definem a habilidade de transformar recursos correntes em consumo de bens futuro estado-contingentes. Por exemplo: sendo I_j o investimento inicial, $Q_{sj} = \phi(I_j, s)$; e
- ✓ Produção total estado-contingente de uma firma deve ser igual à soma dos resultados de todos os títulos emitidos pela firma.

A firma maximiza uma função objetivo que é, na forma geral, a maximização da utilidade esperada de seus acionistas \Rightarrow para fazer isso, em mercados perfeitos e completos sob certeza, a firma maximiza o preço das suas ações, o que maximiza tanto a riqueza, quanto a utilidade de seus acionistas

Para isso, os gestores precisam conhecer apenas a taxa de desconto de mercado e os fluxos de caixa de seus projetos de investimento



Princípio da Separação de Fisher:
Separação da decisão de investimento e das preferências dos acionistas

Separação de Fisher e Decisões Ótimas de Investimento

O Princípio da Separação de Fisher é válido para decisões sob incerteza? Se:

(1) mercado é perfeitamente competitivo e sem custos de transação: garante que as ações de uma firma não afetam os preços dos títulos das demais firmas; e

(2) mercado é completo: garante que o espaço de estados expandido pelo conjunto existente de títulos linearmente independentes (conjunto de oportunidades de risco) não é afetado pelas ações das firmas.

⇒ firmas que maximizam o preço corrente de suas ações também maximizam a utilidade esperada corrente de seus acionistas

⇒ Resultado: a função objetivo da firma de maximizar a riqueza corrente dos acionistas pode ser reformulada em termos de um portfólio de ativos puros que replica seus títulos

A função objetivo da firma passa a ser: $\sum Q_{js}p_s$, em que Q_{js} = resultado do estado-contingente s no final do período dos ativos existentes da firma j

O preço das ações correntes da firma é determinado por:

1. Função de produção contingente da firma $Q_{sj} = \phi(I_j, s)$, que transforma recursos correntes em resultados futuros contingentes; e

2. Investimento inicial I_j , que representa o custo corrente para a firma produzir seu resultado estado contingente

Assim: o preço Y_j ao qual os donos correntes da empresa j podem vender a firma antes de fazer o investimento I_j

é **$Y_j = \sum_s p_s Q_{js} - I_j$**

Separação de Fisher e Decisões Ótimas de Investimento

$$Y_j = \sum_s p_s Q_{js} - I_j = VPL \text{ do projeto de investimento com fluxo de caixa estado contingente}$$

Aceitar investimentos com VPL positivo aumenta o preço corrente das ações da firma e, por consequência, a riqueza e a utilidade esperada dos acionistas

⇒ Como todos os acionistas estão em melhor situação com essas decisões de investimento, as decisões de investimento das empresas são acatadas por todos

Se o mercado de capitais for incompleto ou imperfeito, a mesma conclusão não é obtida, visto que as decisões de investimento podem afetar o preço das ações de outras firmas ou o conjunto de resultados estado-contingentes factíveis ⇒ o aumento no preço das ações de uma firma pode não aumentar a riqueza de todos seus acionistas correntes e pode não maximizar a utilidade esperada dos acionistas

Princípio da Separação e Decisões Ótimas de Investimento

Exemplo: Há duas firmas, que devem tomar a decisão de investimento em um mundo com dois estados sob incerteza. Assuma que todos os investidores são maximizadores de utilidade e possuem utilidade marginal na riqueza positiva. O custo do projeto para a empresa A é de \$10 e da empresa B é de \$8.

Os projetos de investimentos das firmas são dados nas tabelas a seguir:

Empresa A (preço corrente da ação: \$62)		
Estado	Resultado das Ações	Resultado Estado-Contingente do Projeto de Inv.
1	100	10
2	30	12

Empresa B (preço corrente da ação: \$56)		
Estado	Resultado das Ações	Resultado Estado-Contingente do Projeto de Inv.
1	40	12
2	90	6

Para determinar se o mercado é completo: avaliar se os payoffs estado-contingentes dos dois projetos são LI \Rightarrow vetor de resultados da empresa A é (10, 12) e o vetor de resultados da empresa B é (12, 6), logo, os vetores são LI e o mercado é completo

\Rightarrow Princípio da Separação de Fisher é válido, de forma que a firma precisa apenas maximizar o preço corrente de suas ações para maximizar a utilidade esperada dos acionistas

Princípio da Separação e Decisões Ótimas de Investimento

⇒ Firma deve investir apenas em projetos com VPL positivo, o que exige que o preço dos ativos puros seja conhecido nos dois estados. O preço dos ativos puros pode ser obtido pelo preço de mercado das ações das duas empresas e seus payoffs nos estados contingentes pela resolução do sistema:

$$100p_1 + 30p_2 = 62,$$

$$40p_1 + 90p_2 = 56,$$



$$p_1 = \$0,50$$

$$p_2 = \$0,40$$

⇒ Vamos calcular o VPL como $\sum_s p_s Q_{js} - I_j$, logo:

$$VPL_A = 10.0,50 + 12.0,40 - 10 = -\$0,20$$

$$VPL_B = 12.0,50 + 6.0,40 - 8 = +\$0,40$$

Como o projeto da firma A tem VPL negativo, deve ser rejeitado, enquanto que o projeto da firma B deve ser aprovado

Ao examinar essa regra ótima de investimento, deve estar claro que os preços dos ativos puros afetam as decisões de investimento das firmas. Por sua vez, os preços dos ativos puros são afetados por (1) preferência temporal do consumo e produtividade do capital, (2) probabilidade dos resultados estado-contingentes e (3) preferências individuais em relação ao risco e ao nível do risco não diversificável ⇒ decisões de investimento das firmas também são afetadas pelos mesmos fatores