Aula 15 – Sequências e séries

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Definição 1

Uma sequência em $\mathbb{R}$ é uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$.

- Quando não especificado, toda sequência mencionada é em $\mathbb{R}$.
- Denotamos uma sequência por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podendo utilizar outra letra no lugar de x.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n é o valor da função correspodente a n.

Limite de sequência

- Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tende* a um número real x *quando* n *tende* a infinito se x_n se aproxima de x à medida que n aumenta.
- Formalmente: se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$.
- Intuitivamente: se x_n fica tão próximo de x quanto quisermos, desde que tomemos n suficientemente grande.
- Notação: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.
- Outra notação: $x_n \to x$.
- Também dizemos que x *é o limite de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* para x.

Definição 2

Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente (ou converge) se existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* x*, e é divergente (ou diverge) caso contrário.*

Teorema 1 (Unicidade do limite)

O limite de uma sequência, quando existe, é único. Isto é, se $x_n \to x$ e $x_n \to y$, *então* $x = y$.

Teorema 2 (Propriedade arquimediana)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Observação 1

Para evitar divisão por 0 ou dificultar a notação, eventualmente consideramos o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ *"começando do 1", isto é, sem o número 0. Ficará claro no contexto quando fizermos isso.*

Propriedades operatórias

- Se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então:
- $x_n + y_n \to x + y$;
- $x_n y_n \to xy$.
- Se, além disso, $x_n, x \in dom(f)$ e f é contínua, então $f(x_n) \to f(x)$.
- Em particular, se $y_n \neq 0$ e $y \neq 0$, $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$.
- E também, se $c \in \mathbb{R}$, $cx_n \to cx$.
- Logo, $x_n - y_n \to x - y$;

Exercícios

- Usando as propriedades operatórias prove que:
- $\dfrac{n}{n+1} \to 1$;
- $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$;
- Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, então $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Teorema 3 (Teorema do Confronto para sequências)

Se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ambos convergem para* x *e* $y_n \leq x_n \leq z_n$*, então* $x_n \to x$*.*

Exemplo 1

Mostre, a partir desse teorema, que $\dfrac{1}{n!} \to 0$*.*

Definição 3

Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é monótona se, para todo* n, *temos* $x_n \leq x_{n+1}$ *ou se, para todo* n, *temos* $x_n \geq x_{n+1}$. *No primeiro caso dizemos que a sequência é crescente e no segundo decrescente.*

Definição 4

Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada se existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|x_n| < M$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4

Toda sequência monótona e limitada é convergente.

Teorema 5

Toda sequência convergente é limitada.

Séries

- Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência.
- Fixados $n_0 \leq n_1$ em $\mathbb{N}$, defina $\displaystyle\sum_{i=n_0}^{n_1} x_i = x_{n_0} + \ldots + x_{n_1}$.
- A sequência $\displaystyle\left(\sum_{i=n_0}^{n_0+n} x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é chamada de *série de termos* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a partir de* n_0.
- Essa sequência será denotada por $\displaystyle\sum_{n_0} x_n$.
- Denotamos o limite da série, quando existir, por $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$.
- Por abuso de notação diremos que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ *converge* se esse limite existir e *diverge* caso contrário.

Exemplos de séries convergentes

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Exemplos de séries divergentes

- $$\sum_{n=0}^{\infty} n.$$
- $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Critérios de convergência

Na próxima aula estudaremos critérios para sabermos se uma série converge ou diverge.

Fim