Interpolação

Interpolação Polinomial - Complementos

Nelson Kuhl

IME/USP

24 de novembro de 2020

Observações

- O polinômio interpolador independe da ordem dos pontos (x_i, y_i), $0 \leq i \leq n$;

Observações

- O polinômio interpolador independe da ordem dos pontos (x_i, y_i), $0 \leq i \leq n$;
- para representar o polinômio interpolador, a escolha da base de $\mathcal{P}_n$ é indiferente do ponto de vista matemático, mas importante do ponto de vista numérico;

Observações

- O polinômio interpolador independe da ordem dos pontos (x_i, y_i), $0 \leq i \leq n$;
- para representar o polinômio interpolador, a escolha da base de $\mathcal{P}_n$ é indiferente do ponto de vista matemático, mas importante do ponto de vista numérico;
- a forma de Lagrange, usando a fórmula baricêntrica, é em geral a mais recomendável para o cálculo de valores do polinômio interpolador;

Observações

- O polinômio interpolador independe da ordem dos pontos (x_i, y_i), $0 \leq i \leq n$;
- para representar o polinômio interpolador, a escolha da base de $\mathcal{P}_n$ é indiferente do ponto de vista matemático, mas importante do ponto de vista numérico;
- a forma de Lagrange, usando a fórmula baricêntrica, é em geral a mais recomendável para o cálculo de valores do polinômio interpolador;
- a forma de Newton também é muito usada, mas a ordem dos pontos escolhidos para a base pode levar a instabilidades numéricas.

Diferenças divididas e derivadas

Seja p_n o polinômio interpolador da tabela

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\ldots$	$f(x_n)$

gerada por uma função f. Se acrescentarmos à tabela o ponto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, onde $\bar{x} \neq x_i$, $0 \leq i \leq n$, então o polinômio interpolador desta nova tabela é dado por

Diferenças divididas e derivadas

Seja p_n o polinômio interpolador da tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$

gerada por uma função f. Se acrescentarmos à tabela o ponto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, onde $\bar{x} \neq x_i$, $0 \leq i \leq n$, então o polinômio interpolador desta nova tabela é dado por

$$p_{n+1}(x; \bar{x}) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}] \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Como $p_{n+1}(\bar{x}; \bar{x}) = f(\bar{x})$, concluimos da expressão acima que

Diferenças divididas e derivadas

Seja p_n o polinômio interpolador da tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$

gerada por uma função f. Se acrescentarmos à tabela o ponto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, onde $\bar{x} \neq x_i$, $0 \leq i \leq n$, então o polinômio interpolador desta nova tabela é dado por

$$p_{n+1}(x;\bar{x}) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}] \cdot (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

Como $p_{n+1}(\bar{x};\bar{x}) = f(\bar{x})$, concluimos da expressão acima que

$$f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}] \cdot (\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_n). \quad (1)$$

Diferenças divididas e derivadas

Se f tiver pelo menos $n+1$ derivadas contínuas, então, comparando-se (1) com a fórmula do erro, concluimos que existe um ponto t pertencente ao menor intervalo contendo os pontos x_i, $0 \leq i \leq n$, e $\bar{x}$ tal que

Diferenças divididas e derivadas

Se f tiver pelo menos $n+1$ derivadas contínuas, então, comparando-se (1) com a fórmula do erro, concluimos que existe um ponto t pertencente ao menor intervalo contendo os pontos x_i, $0 \leq i \leq n$, e $\bar{x}$ tal que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}] = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

Usando-se de forma mais geral o argumento para se chegar à expressão acima, temos:

Diferenças divididas e derivadas

Se f tiver pelo menos $n+1$ derivadas contínuas, então, comparando-se (1) com a fórmula do erro, concluimos que existe um ponto t pertencente ao menor intervalo contendo os pontos x_i, $0 \leq i \leq n$, e $\bar{x}$ tal que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}] = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

Usando-se de forma mais geral o argumento para se chegar à expressão acima, temos:

Teorema 1

Suponha que $f \in C^k([a, b])$. Sejam x_i, $x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ $k+1$ pontos distintos em $[a, b]$. Então existe um ponto t pertencente ao menor intervalo contendo estes pontos tal que

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f^{(k)}(t)}{k!}.$$

Pontos igualmente espaçados

Suponha que os pontos x_i, $0 \leq i \leq n$, são equidistantes com espaçamento h:

$$x_{i+1} - x_i = h, 0 \leq i \leq n-1.$$

Nesta situação, as diferenças divididas podem ser escritas em termos de **diferenças simples**:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f(x_i)}{k! h^k},$$

onde as diferenças simples são definidas pelas relações:

Diferenças simples de ordem j

- $j = 0 : \Delta^0 f(x) = f(x)$
- $j = 1 : \ \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$
- $j = 2 : \ \Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$

$\vdots$

- $j = k : \ \Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x)$