PTC3420 - Programação Matemática Aplicada a Controle

Programação Matemática com Restrições de Igualdade e Desigualdade

PTC - EPUSP

Aula 24 - 2020

Modelos de Rastreamento - Otimização por Mínimos Quadrados

O método consiste em encontrar a composição da carteira que minimize a diferença ao quadrado entre seus retornos e os retornos do benchmark. O problema consiste em minimizar o seguinte erro err:

$$err = y - \Gamma\omega.$$

O vetor ω, que dá a composição da carteira, é escolhido segundo a seguinte minimização:

$$\min\,(y-\Gamma\omega)'(y-\Gamma\omega)$$

sujeito a

$$\omega' e = 1,$$

$$\omega \in R^p.$$

A restrição $\omega' e = 1$ significa que o somatório de todos os pesos dos ativos é igual a 1.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, a solução desse problema é:

$$\omega = \left(\frac{1 - e'(\Gamma'\Gamma)^{-1}\Gamma' y}{e'(\Gamma'\Gamma)^{-1}e}\right)(\Gamma'\Gamma)^{-1}e + (\Gamma'\Gamma)^{-1}\Gamma' y$$

Modelos de Rastreamento - Otimização por Mínimos Quadrados

Para problemas com restrições, por exemplo, posições vendidas proibidas, o problema consiste em minimizar:

$$\begin{aligned}
&\text{min}\,(y-\Gamma\omega)'(y-\Gamma\omega)\\
&\text{sujeito a}\\
&\omega \geq 0,\\
&\omega' e = 1,\\
&\omega \in R^p.
\end{aligned}$$

As restrições $\omega \geq 0$ e $\omega' e = 1$ significam que será trabalhado apenas com posições compradas e com o somatório de todos os pesos dos ativos sendo igual a 1.

Exemplo

Considere os dados de 2 fundos, mercado, e título público em 4 anos. Formule e resolva o problema de rastrear a carteira de mercado com os 2 fundos e título público considerando o caso sem e com restrições a posições vendidas.

Tabela: Dados dos fundos, mercado e título público

Ano	Fundo 1	Fundo 2	Título Público	Mercado
1	35,0%	20,0%	14,0%	32,0%
2	-5,0%	8,0%	13,5%	-2,0%
3	28,0%	18,0%	13,0%	26,0%
4	-4,0%	7,0%	12,0%	-3,0%

Exemplo

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 35,0\% & 20,0\% & 14,0\% \\ -5,0\% & 8,0\% & 13,5\% \\ 28,0\% & 18,0\% & 13,0\% \\ -4,0\% & 7,0\% & 12,0\% \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 32,0\% \\ -2,0\% \\ 26,0\% \\ -3,0\% \end{pmatrix}$$

Exemplo - Sem Restrições

$$\omega_{opt} = \begin{pmatrix} 0,625 \\ 0,810 \\ -0,435 \end{pmatrix}$$

Tabela: Erro

Ano	Erro (Mercado-Portolio)
1	0,02%
2	0,51%
3	-0,42%
4	-0,96%

$$\text{Erro Total} = 1,91\%$$

Exemplo - Com Restrições

$$\omega_{opt} = \begin{pmatrix} 0,813 \\ 0,187 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tabela: Erro

Ano	Erro (Mercado-Portolio)
1	-0,2%
2	0,57%
3	-0,13%
4	-1,06%

$$\text{Erro Total} = 1,95\%$$

Programação Linear com Restrições de Igualdade e Desigualdade

Desejamos resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ \text{s.a.}\ & h_1(x) = 0, \\ & \vdots \\ & h_m(x) = 0, \\ & g_1(x) \leq 0, \\ & \vdots \\ & g_p(x) \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Programação Linear com Restrições de Igualdade e Desigualdade

De forma mais compacta,

$$
\begin{aligned}
\min\ & f(x) \\
\text{s.a.}\ & h(x) = 0 \\
& g(x) \leq 0 \\
& x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

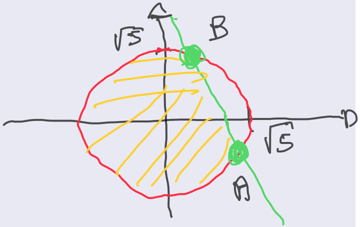
onde

$$
h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_p(x) \end{pmatrix}
$$

Exemplo

Considere o seguinte problema

$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 \\
\text{s.a.}\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\
& 3x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$



Neste caso

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 5, \\
g_2(x) &= 3x_1 + x_2 - 6
\end{aligned}
$$

Ponto Regular

Seja

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0,\ g(x) \leq 0\},$$

e para $x \in \mathcal{S}$,

$$J(x) = \{1 \leq j \leq p; g_j(x) = 0\}.$$

Então x é dito ser um ponto regular de $\mathcal{S}$ se os vetores gradientes

$$\nabla h_i(x),\ \ i = 1, \ldots, m$$

e

$$\nabla g_j(x),\ \ j \in J(x)$$

são L.I.

Teorema - Condições de Kuhn-Tucker ou Condições de 1a Ordem

Seja $x^* \in \mathcal{S}$ um ponto regular e que seja mínimo local de f em $\mathcal{S}$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e $\mu \in \mathbb{R}^p$ com $\mu \geq 0$ tal que

$$\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda + \nabla h(x^*)\mu = 0,$$

$$\mu' g(x^*) = 0,$$

g

$\mu_j g_j(x^*) = 0$

$j = 1, \dots, p$

onde $\mu_1 \underbrace{g_1(x^*)}_{\leq 0} + \dots + \mu_p \underbrace{g_p(x^*)}_{\leq 0} = 0$

$$\nabla g(x^*) = \begin{bmatrix} \nabla g_1(x^*) & \cdots & g_p(x^*) \end{bmatrix}$$

é uma matriz $n \times p$.

Exemplo

Considere o seguinte problema

$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 \\
\text{s.a.}\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\
& 3x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

Aplique as condições de Kuhn-Tucker e determine os mínimos locais e global do problema acima. Lembre-se que nesse caso

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 5, \quad \mu_1 \\
g_2(x) &= 3x_1 + x_2 - 6 \quad \mu_2
\end{aligned}
$$

$$f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2$$

Temos 4 casos:

$$\begin{cases} \text{Caso 1)}\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 0 \\ \text{Caso 2)}\ \mu_1 > 0,\ \mu_2 = 0 \Rightarrow g_1(x) = 0 \\ \text{Caso 3)}\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 > 0 \Rightarrow g_2(x) = 0 \\ \text{Caso 4)}\ \mu_1 > 0,\ \mu_2 > 0 \Rightarrow g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 \end{bmatrix},\quad \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix},\quad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kuhn-Tucker:

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \nabla g(x)\mu = 0 \\ \mu_1 g_1(x) = 0,\ \mu_2 g_2(x) = 0 \end{cases},\quad \mu \geq 0$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 10 + 2x_1\mu_1 + 3\mu_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 + 2x_2\mu_1 + \mu_2 = 0 \\ \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0,\ \mu_2(3x_1 + x_2 - 6) = 0 \end{cases},\quad \mu_1 \geq 0,\ \mu_2 \geq 0$$

~~Caso 1~~: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$ $\Rightarrow \nabla f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} \cancel{4x_1} + 2x_2 = 10 \\ -\cancel{4x_1} - 4x_2 = -20 \\ \hline -2x_2 = -10 \end{array} \Rightarrow \underline{x_2 = 5}$$

$\Rightarrow 4x_1 = 10 - 2.5 = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0}$

Não atende as restrições

Caso 2: $\mu_1 > 0$, $\mu_2 = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x) + \nabla g_1(x)\mu_1 = 0 \\ g_1(x) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_1\mu_1 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_2\mu_1 = 10 \\ x_1^2 + x_2^2 = 5, \quad \mu_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2+\mu_1)x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + (1+\mu_1)x_2 = 5 \\ x_1^2 + x_2^2 = 5, \quad \mu_1 > 0 \end{cases}$$

$$\underline{x_1 = 5 - (1+\mu_1)x_2}$$

x_1

$$x_2 + (2+\mu_1)\left\{5-(1+\mu_1)x_2\right\} = 5$$

$$\underbrace{\left(1-(2+\mu_1)(1+\mu_1)\right)}x_2 = 5\left(1-(2+\mu_1)\right) = -5(1+\mu_1)$$

$$-x_2\left(\mu_1^2+3\mu_1+1\right) = -5(1+\mu_1) \Rightarrow x_2 = \frac{5(1+\mu_1)}{\mu_1^2+3\mu_1+1}$$

$$x_1 = 5 - \frac{(1+\mu_1)\,5(1+\mu_1)}{\mu_1^2+3\mu_1+1} = \frac{5\mu_1}{\mu_1^2+3\mu_1+1}$$

$$x_1^2+x_2^2 = \left[\frac{5\mu_1}{\mu_1^2+3\mu_1+1}\right]^2 + \left[\frac{5(\mu_1+1)}{\mu_1^2+3\mu_1+1}\right]^2 = \frac{25\left(\mu_1^2+(\mu_1+1)^2\right)}{\left(\mu_1^2+3\mu_1+1\right)^2} = 5$$

$$5\left(2\mu_1^2+2\mu_1+1\right) = \mu_1^4+6\mu_1^3+11\mu_1^2+6\mu_1+1 \Rightarrow$$

$$\mu_1^4+6\mu_1^3+\mu_1^2-4\mu_1-4 = 0 \Rightarrow (\mu_1-1)\underbrace{\left(\mu_1^3+7\mu_1^2+8\mu_1+4\right)}_{>0 \text{ para } \mu_1>0} = 0$$

Logo, a única solução é $\boxed{\mu_1 = 1}$

Com isso, $\boxed{x_1 = 1,\ x_2 = 2}$, $g_2(1,2) = -1 < 0$ OK

$\boxed{x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 0}$ Atende as condições de Jordan

~~Caso 3~~: $\mu_1 = 0,\ \mu_2 > 0 \Rightarrow \nabla f(x) + \nabla g_2(x)\mu_2 = 0 \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3\mu_2 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + \mu_2 = 10 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \end{cases},\ \mu_2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2/5 \\ x_2 = 24/5 \\ \mu_2 = -2/5 \end{cases}$$

não serve

negativo

~~Caso 4~~: $\mu_1 > 0,\ \mu_2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x) + \nabla g_1(x)\mu_1 + \nabla g_2(x)\mu_2 = 0 \\ g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0,\ \mu_1 > 0,\ \mu_2 > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_1\mu_1 + 3\mu_2 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_2\mu_1 + \mu_2 = 10 \\ x_1^2 + x_2^2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \end{cases},\ \begin{matrix} \mu_1 > 0 \\ \mu_2 > 0 \end{matrix} \Longrightarrow \overset{A}{\begin{cases} x_1 = 2{,}174 \\ x_2 = -0{,}522 \end{cases}} \text{ ou } \overset{B}{\begin{cases} x_1 = 1{,}426 \\ x_2 = 1{,}722 \end{cases}}$$

(A) $\Rightarrow \mu_1 = -2{,}37$, $\mu_2 = 4{,}2$

(B) $\Rightarrow \mu_1 = 1{,}37$, $\mu_2 = -1{,}05$

não serve