PTC3420 - Programação Matemática Aplicada a Controle

Controle Ótimo

PTC - EPUSP

Aula 23 - 2020

Controle Ótimo

Suponha que um processo dinâmico unidimensional seja governado pela equação a diferenças:

$$x(k+1) = \phi(x(k), u(k), k)$$

com condição inicial $x(0) = x_0$. Nesta equação $x(k)$ é a variável de estado, $u(k)$ o controle no instante k. Associado a este sistema temos o custo que desejamos minimizar

$$J(u) = \sum_{k=0}^{T} \psi(x(k), u(k), k)$$

$u(0), -, u(T)$

Além disto temos a condição terminal

$$G(x(T+1)) = 0.$$

Controle Ótimo

O problema é achar uma sequência de controles $u = (u(0), \ldots, u(T\cancel{-1}))$ e os correspondentes valores de estado de forma a minimizar $J(u)$ e satisfazer a condição terminal. Ou seja,

$$\min \sum_{k=0}^{T} \psi(x(k), u(k), k)$$

$$\text{s.a.}\quad x(k+1) = \phi(x(k), u(k), k)$$

$$G(x(T+1)) = 0.$$

As variáveis do problema são $x(1), \ldots, x(T+1)$ e $u(0), \ldots, u(T\cancel{1})$.

$\underline{1^a \text{ Ordem}}$: $\begin{cases} \nabla f(x) + \nabla h(x)\lambda = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$ $\Leftarrow$

Controle Ótimo

Adotaremos a seguinte notação:

$$\phi_x^k(x,u) = \frac{\partial \phi(x,u,k)}{\partial x}, \quad \phi_u^k(x,u) = \frac{\partial \phi(x,u,k)}{\partial u}$$

$$\psi_x^k(x,u) = \frac{\partial \psi(x,u,k)}{\partial x}, \quad \psi_u^k(x,u) = \frac{\partial \psi(x,u,k)}{\partial u}$$

$$G_x(x) = \frac{dG(x)}{dx}.$$

Controle Ótimo

Vamos obter as equações para o caso $T = 2$. Nessa caso o problema é, determinar $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ de forma a minimizar

$$
\begin{aligned}
\min\ & \psi(x_0, u(0), 0) + \psi(x(1), u(1), 1) + \psi(x(2), u(2), 2) \\
\text{s.a. } & x(k+1) = \phi(x(k), u(k), k), \ \ k = 0, 1, 2 \\
& G(x(3)) = 0.
\end{aligned}
$$

Vamos escrever nossa variável de decisão como:

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u(0) \\ x(1) \\ u(1) \\ x(2) \\ u(2) \\ x(3) \end{pmatrix}
$$

$$g(x) = \phi(x_0, u(0), 0) + \phi(x(1), u(1), 1) + \phi(x(2), u(2), 2)$$

Controle Ótimo

O vetor h teria dimensão 4 e seria definido da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
h_0(\mathbf{x}) &= \phi(x_0, u(0), 0) - x(1) \\
h_1(\mathbf{x}) &= \phi(x(1), u(1), 1) - x(2) \\
h_2(\mathbf{x}) &= \phi(x(2), u(2), 2) - x(3) \\
h_3(\mathbf{x}) &= G(x(3)).
\end{aligned}
$$

Controle Ótimo

Gradientes de h.

$$\nabla h_0(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi_u^0(x_0, u(0)) \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla h_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_x^1(x(1), u(1)) \\ \phi_u^1(x(1), u(1)) \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla h_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_x^2(x(2), u(2)) \\ \phi_u^2(x(2), u(2)) \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla h_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ G_x(x(3)) \end{pmatrix}$$

Controle Ótimo

Gradiente de f.

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_u^0(x_0, u(0)) \\ \cancel{\psi_x^0(x_0, u(0))} \\ {}_{x}\psi_{\cancel{u}}^1(x(1), u(1)) \\ {}_{u}\psi_{\cancel{x}}^1(x(1), u(1)) \\ {}_{x}\psi_{\cancel{u}}^2(x(2), u(2)) \\ {}_{u}\psi_{\cancel{x}}^2(x(2), u(2)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Condição de 1a Ordem

$$
\begin{pmatrix} \psi_u^0 \\ \cancel{\psi_x^0} \\ \psi_u^1 \\ \psi_x^1 \\ \psi_u^2 \\ \psi_x^2 \\ 0 \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix}
\phi_u^0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & \phi_x^1 & 0 & 0 \\
0 & \phi_u^1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & \phi_x^1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & G_x
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda(0) \\ \lambda(1) \\ \lambda(2) \\ \lambda(3) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$\to \phi_u^2$

$\nabla f(x) + \nabla h(x)\,\lambda = 0$

Condição de 1a Ordem

$$\psi_u^0 + \lambda(0)\phi_u^0 = 0$$

$$\psi_x^1 - \lambda(0) + \lambda(1)\phi_x^1 = 0$$

$$\psi_u^1 + \lambda(1)\phi_u^1 = 0$$

$$\psi_x^2 - \lambda(1) + \lambda(2)\phi_x^2 = 0$$

$$\psi_u^2 + \lambda(2)\phi_u^2 = 0$$

$$-\lambda(2) + \lambda(3)G_x = 0$$

Condição de 1a Ordem

$$
\begin{aligned}
&\psi_u^k + \lambda(k)\phi_u^k = 0, \quad k = 0, 1, 2 \\
&\psi_x^k - \lambda(k-1) + \lambda(k)\phi_x^k = 0, \quad k = 1, 2 \\
&\lambda(2) = \lambda(3)G_x
\end{aligned}
$$

Condição de 1a Ordem - Caso Geral

$$\begin{cases} \psi_u^k + \lambda(k)\phi_u^k = 0, \;\; k = 0, 1, \ldots, T \text{ (condição variacional)} \\ \psi_x^k - \lambda(k-1) + \lambda(k)\phi_x^k = 0, \;\; k = 1, \ldots, T \text{ (equação adjunta)} \\ \lambda(T) = \lambda(T+1)G_x \text{ (equação adjunta final)} \end{cases}$$

Controle de Estoque

Uma pessoa vende uma determinada mercadoria em uma loja. No início do dia k essa pessoa deve decidir se vai fazer um pedido de novas mercadorias ou devolver algumas mercadorias não vendidas. EM ambos os casos as mercadorias são entregues ou devolvidas no início do dia k. Em $k = 0$ a loja possui x_0 mercadorias. Ao final de $T + 1$ dias a demanda total de mercadorias será de

$$D = \sum_{k=0}^{T} d(k),$$

onde D é conhecido, e $d(k)$ é a demanda da mercadoria no dia k (não conhecida).

Controle de Estoque

Seja $x(k)$ o total de mercadorias no início do dia k. Então

$$x(k+1) = x(k) + u(k) - d(k)$$

Deseja-se obter $u = (u(0), \ldots, u(T))$ de forma a minimizar $(0 < \beta < 1)$

$$J(u) = \sum_{k=0}^{T} \frac{1}{2} \beta^k u(k)^2$$

e satisfazer a condição terminal

$$x(T+1) = 0.$$

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)^{k} \qquad \frac{1}{\beta} > 1$$

Controle de Estoque

Mostre que a solução é dada por:

$$u^*(k) = \left(\beta^{-k}\right)\left(\frac{1-\beta^{-1}}{1-\beta^{-(T+1)}}\right)(D-x_0), \quad k = 0, \dots, T$$

> 0

e que

$$J(u^*) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\beta^{-1}}{1-\beta^{-(T+1)}}\right)(D-x_0)^2.$$

$$\varphi_u^k + \lambda(k)\,\phi_u^k = 0, \quad k=0,\dots,T \qquad \lambda(T) = \lambda(T+1)\,G_x$$

$$\varphi_x^k - \lambda(k-1) + \lambda(k)\,\phi_x = 0, \quad k=1,\dots,T$$

$$\begin{cases} \psi(x,u,t) = \frac{1}{2}\beta^t u^2, & \phi(x,u,t) = x + u - d(t) \\ G(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta^t u(t) + \lambda(t) = 0, & t = 0, \dots, T \\ \lambda(t) = \lambda(t-1), & t = 1, \dots, T \\ \lambda(T) = \lambda(T+1) \end{cases}$$

$\psi^t_u = \beta^t u, \quad \phi^t_u = 1$

$\psi^t_x = 0, \quad \phi^t_x = 1$

$G_x = 1$

- $c = \lambda(T+1) = \lambda(t), \quad t = 0, \dots, T+1$

$$\beta^t u(t) = c \implies u(t) = \beta^{-t} c$$

$$x(t) = x_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \left(u(s) - d(s) \right)$$

$$0 = x(T+1) = x_0 + \sum_{j=0}^{T} u(j) - \sum_{j=0}^{T} d(j) = D$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{T} u(j) = D - x_0$$

$$\Rightarrow c \sum_{j=0}^{T} \beta^{-n} = D - x_0$$

$$\sum_{j=0}^{T} \beta^{-n} = \frac{1 - \beta^{-(T+1)}}{1 - \beta^{-1}}$$

$$c = \left(\frac{1-\beta^{-1}}{1-\beta^{-(T+1)}}\right)(D-x_0)$$

$t = 0, \ldots, T$

$$u^*(t) = \beta^{-t}\left(\frac{1-\beta^{-1}}{1-\beta^{-(T+1)}}\right)(D-x_0)$$

$$J^* = J(u^*) = \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{2} \beta^t u^*(t)^2$$

$$= \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{2} \cancel{\beta^{t}} \cancel{\beta^{-2t}} c^2 = \frac{1}{2}(c^2) \sum_{t=0}^{T} \beta^{-t}$$

$$= \frac{1}{2} c^2 \left(\frac{1 - \beta^{-(T+1)}}{1 - \beta^{-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \beta^{-1}}{1 - \beta^{-(T+1)}} \right) (D - x_0)^2$$