PTC3420 - Programação Matemática Aplicada a Controle

Programação Linear com Restrições de Igualdade

PTC - EPUSP

Aula 21 - 2020

Programação Linear com Restrições de Igualdade

Desejamos resolver o seguinte problema:

max $f(x)$ $\Leftrightarrow$ $-\min -f(x)$

$$
\begin{aligned}
\min \ & f(x) \\
\text{s.a.} \ & h_1(x) = 0, \\
& \vdots \\
& h_m(x) = 0 \\
& x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

Programação Linear com Restrições de Igualdade

De forma mais compacta,

$$\begin{aligned} \min \ & f(x) \\ \text{s.a.} \ & h(x) = 0 \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

onde

$$h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{pmatrix}$$

Exemplo

$$\max\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$$
$$\text{s.a.}\ \ x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x \in \mathbb{R}^3$$

$m = 1$

$n = 3$

Neste caso,

$- \min f(x)$

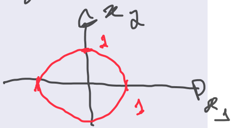
$$f(x) = -(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$$
$$h(x) = 3 - (x_1 + x_2 + x_3)$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \\
\text{s.a.} \quad & x_1^2 + x_2^2 = 1 \\
& x \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

$m = 1$

$n = 2$



Neste caso,

$$f(x) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

$$h(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2$$

$x_1(t) = \operatorname{sen} t$

$x_2(t) = \cos t$

$x_1(t)^2 + x_2(t)^2 = 1$

Plano Tangente

Seja $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0\}$. Uma curva em $\mathcal{S}$ é uma família de pontos $x(t) \in \mathcal{S}$ continuamente parametrizada em t para $a \leq t \leq b$. A curva é diferenciável se $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ existe, e é duas vezes diferenciável se $\ddot{x}(t)$ existe. Uma curva $x(t)$ é dita passar através do ponto x^* se $x^* = x(t^*)$ para algum t^* com $a \leq t^* \leq b$. A derivada da curva em x^* é definida como $\dot{x}(t^*) \in \mathbb{R}^n$.

Plano Tangente

Considere todas as curvas diferenciáveis em $\mathcal{S}$ passando através de um ponto x^*. O plano tangente em x^* é definido como a coleção de todas as derivadas em x^* de todas as curvas diferenciáveis. O plano tangente é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Plano Tangente

Seja $x^* \in \mathcal{S}$. Definimos o subespaço $M(x^*) \subset \mathbb{R}^n$ da seguinte forma:

$$M(x^*) = \{y \in \mathbb{R}^n; \nabla h(x^*)'y = 0\}$$

onde

$$\nabla h(x^*) = \begin{bmatrix} \nabla h_1(x^*) & \cdots & h_m(x^*) \end{bmatrix} \rightarrow n \times m$$

é uma matriz $n \times m$.

Ponto Regular

Um ponto $x^* \in \mathcal{S}$ é dito ser um ponto regular se todos os vetores $\nabla h_1(x^*), \ldots, \nabla h_m(x^*)$ são linearmente independentes.

Teorema

Em um ponto regular $x^* \in \mathcal{S}$ o plano tangente é igual ao conjunto

$$M(x^*) = \{y \in \mathbb{R}^n; \nabla h(x^*)' y = 0\}.$$

Lema

Seja $x^* \in \mathcal{S}$ um ponto regular e que seja mínimo local de f em $\mathcal{S}$. Se $y \in \mathbb{R}^n$ é tal que

$$\nabla h(x^*)' y = 0$$

então y também deve satisfazer

$$\nabla f(x^*)' y = 0.$$

$y \in N(\nabla h(x^*)') \Rightarrow y \perp Im(\nabla h(x^*))$

$\Rightarrow \nabla f(x^*)' y = 0 \Rightarrow \nabla f(x^*) \in Im[\nabla h(x^*)]$

$x(t)$ uma curva de S tal que $x(0) = x^*$

$$\left.\frac{d f(x(t))}{dt}\right|_{t=0} = 0 \qquad \frac{d f(x(t))}{dt} = \nabla f(x(t))' \dot{x}(t)$$

Em $t=0$, $\left.\frac{d f(x(t))}{dt}\right|_{t=0} = 0 = \nabla f(x^*)' \underbrace{\dot{x}(0)}_{y}$

$$y \in M(x^*) \Leftrightarrow \nabla h(x^*)' y = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(x^*)' y = 0$$

Teorema - Condição Necessária de 1^a Ordem - Multiplicadores de Lagrange

Seja $x^* \in \mathcal{S}$ um ponto regular e que seja mínimo local de f em $\mathcal{S}$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda = 0.$$

vetor multiplicador de Lagrange

$$\nabla f(x^*) \in \mathrm{Im}\{\nabla h(x^*)\}$$

Logo, $\nabla f(x^*) = -\nabla h(x^*)\lambda$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}^m$.

$$\boxed{\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda = 0}$$

condição de 1ª Ordem

Restrições:

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda = 0 & \to n \text{ restrições} \\ h(x^*) = 0 & \to m \text{ restrições} \end{cases}$$

$\overline{n+m \text{ restrições}}$

Variáveis: $x^* \to n$

$\lambda \to m$

$\overline{n+m \text{ variáveis}}$

$\lambda \rightarrow$ multiplicadores de Lagrange

Lagrangiano : $\ell(x,\lambda) = f(x) + h(x)'\lambda =$

$$= f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x)$$

$$\begin{cases} \nabla_x \ell(x,\lambda) = \nabla f(x) + \nabla h(x)\lambda = 0 \\ \nabla_\lambda \ell(x,\lambda) = h(x) = 0 \end{cases}$$

Condição de 1ª Ordem : $\nabla \ell(x,\lambda) = \begin{bmatrix} \nabla_x \ell(x,\lambda) \\ \nabla_\lambda (x,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Exemplo: Determine os candidatos a máximo local do problema abaixo

$$\max \; x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$$
$$\text{s.a.} \; x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x \in \mathbb{R}^3$$

$$f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \Rightarrow \nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$h(x) = 3 - (x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow \nabla h(x) = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Condição de 1ª Ordem:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_1 + \underbrace{x_2 + x_3}_{\lambda} = 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = x_2 + x_3 = x_1 + x_3 = x_1 + x_2$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Teorema - Condição Necessária de 2^a Ordem

Seja $x^* \in \mathcal{S}$ um ponto regular e que seja mínimo local de f em $\mathcal{S}$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tal que

$h(x^*) = 0$

$$\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda = 0.$$

Seja $M(x^*) = \{y \in \mathbb{R}^n; \nabla h(x^*)' y = 0\}$. Então a matriz

$$L(x^*) = \underline{\underline{F(x^*)}} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underline{\underline{H_i(x^*)}}$$

é positiva semi-definida em $M(x^*)$.

$$\underbrace{\nabla h(x^*)}_{n \times m} = \left[\nabla h_1(x^*) \ \ldots \ \nabla h_m(x^*) \right]$$

Notação

1. $F(x) \rightarrow$ matriz hessiana de $f(x)$.
2. $H_i(x) \rightarrow$ matriz hessiana de $h_i(x)$.
3. $L(x)$ positiva semi-definida em $M(x)$ significa que para todo $y \in M(x)$,
$$y'L(x)y \geq 0.$$
4. $L(x)$ positiva definida em $M(x)$ significa que para todo $y \in M(x)$ com $y \neq 0$,
$$y'L(x)y > 0.$$

$$M(x) = \underline{\{ y \in \mathbb{R}^n ; \nabla h_i(x)' y = 0, \ i = 1, \ldots, m \}}$$

$$\frac{d^2 f(x(t))}{dt^2} = \frac{d\left(\nabla f(x(t))' \dot{x}(t)\right)}{dt} =$$

$x(0) = x^*$

x^* mínimo local de $f(x)$ en S

$$\dot{x}(t)' F(x(t)) \dot{x}(t) + \nabla f(x(t))' \ddot{x}(t)$$

1

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2 f(x(t))}{dt^2}\right|_{t=0} = \dot{x}(0)' F(x^*) \dot{x}(0) + \boxed{\nabla f(x^*)' \ddot{x}(0)} \geq 0$$

$$\lambda' \underbrace{h(x(t))}_{=0} = 0 \Rightarrow \frac{d \lambda' h(x(t))}{dt} = \lambda' \frac{d h(x(t))}{dt} = \underbrace{}_{0}$$

$$= \lambda' \nabla h(x(t))' \dot{x}(t) = \underbrace{\dot{x}(t)' \nabla h(x(t)) \lambda}_{b} = 0$$

$$\frac{d^2 \lambda' h(x(t))}{dt^2} = \frac{d\left(\dot{x}(t)' \nabla h(x(t)) \lambda\right)}{dt} =$$

2

$$\ddot{x}(t)' \nabla h(x(t)) \lambda + \dot{x}(t)' \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i H_i(x(t))\right) \dot{x}(t) = 0$$

(a) $t=0$ $\quad \dot{x}(0)'\nabla h(x^*)\lambda + \dot{x}(0)'\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i H_i(x^*)\right)\dot{x}(0) = 0$

(b) $\left.\dfrac{d^2 f(x(t))}{dt^2}\right|_{t=0} = \dot{x}(0)' F(x^*)\dot{x}(0) + \nabla f(x^*)'\ddot{x}(0) \geq 0$

$$0 \leq \dot{x}(0)'\left(F(x^*) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i H_i(x^*)\right)\dot{x}(0) + \ddot{x}(0)'\left(\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda\right)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(0)'\left(F(x^*) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i H_i(x^*)\right)\dot{x}(0) \geq 0$$

$$\dot{x}(0) \leftrightarrow y \in M(x^*) = \{y \in \mathbb{R}^n : \nabla h_i(x^*)'y = 0,\ i=1,\dots,m\}$$

$L(x^*)$ é positiva semi-definida em $M(x^*)$

Teorema - Condição Suficiente de 2^a Ordem

Suponha que $x^* \in \mathcal{S}$ um ponto regular e que satisfaça:

1. Existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tal que
$$\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda = 0.$$
2. Para $M(x^*) = \{y \in \mathbb{R}^n ; \nabla h(x^*)' y = 0\}$ a matriz
$$L(x^*) = F(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i H_i(x^*)$$
é positiva definida em $M(x^*)$.

Então x^* é um ponto de mínimo local estrito de f em $\mathcal{S}$.

Exemplo: Determine os candidatos a máximo local do problema abaixo

$$\max \; x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$$
$$\text{s.a.} \; x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$x \in \mathbb{R}^3$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla h(x) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underbrace{\det(L)}_{\text{produto dos autovalores}} < 0$$

$$M(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 ; \nabla h(x)' y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = y_1 + y_2 + y_3 = 0 \right\}$$

$$y' L y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 + y_3 \\ y_1 + y_3 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{bmatrix} = -\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \right) < 0$$

para $y \neq 0$

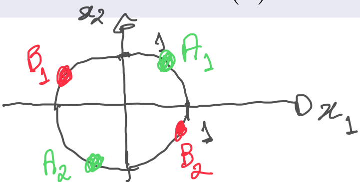
Conclusão: L é negativa definida no subespaço tangente M $\Rightarrow$ $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ é máximo local

Exemplo: Aplique as condições de 1a e 2a ordem e obtenha os pontos de mínimo e máximo.

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ & x \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \\ h(x) &= 1 - x_1^2 - x_2^2 \end{aligned}$$



$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} -4x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla h(x) = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}, \quad H(x) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

λ tal que a matriz é singular $\Leftrightarrow \det(\cdot) = 0$

Condição de 1° Ordem: $\begin{cases} \nabla f(x) + \nabla h(x)\lambda = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -4x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4-2\lambda & 4 \\ 4 & 2-2\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$\det\left\{ 2 \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right\} = 0 \Leftrightarrow -(2+\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0$$

$$-(2 - 2\lambda + \lambda - \lambda^2) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$\underline{\underline{\lambda = 2}}$:
$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x_1 = x_2 \Rightarrow x_1^2 + (2x_1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x_2 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\lambda = -3}}$:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -2x_2 \Rightarrow 4x_2^2 + x_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad x_1 = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad B_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{2^a \text{ Ordem}}$: $L(x) = F(x) + H(x)\lambda = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \lambda$

$$= \begin{bmatrix} -4 - 2\lambda & 4 \\ 4 & 2 - 2\lambda \end{bmatrix} \qquad M(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 ;\ 2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$\underline{\lambda = 2}$ $\quad L = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $\det(L) = 0$, $\operatorname{tr}(L) = -10$, $\quad A_1 = -A_2$, $\quad M_A = \{ y \in \mathbb{R}^2 ;\ y_1 + 2y_2 = 0 \}$

$$2 \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4y_1 + 2y_2 \\ 2y_1 - y_2 \end{pmatrix} =$$

$$2\left(-4y_1^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_2 - y_2^2\right) \overset{y_1 = -2y_2}{=} 2\left(-16y_2^2 - 8y_2^2 - y_2^2\right)$$

$$= -50\, y_2^2 < 0 \quad \text{para } y \neq 0$$

L é negativa definida em $M_A \Rightarrow A_1, A_2$ são máximos locais globais

$\underline{\lambda = 3}$ $\quad L = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\quad M_B = \{ y \in \mathbb{R}^2 ;\ y_2 = 2y_1 \}$

$$2 \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 50\, y_1^2 > 0 \quad \text{para } y \neq 0$$

L é positiva definida em $M_B \Rightarrow B_1, B_2$ são mínimos locais globais

$$f(A_1) = f(A_2) = 2, \quad f(B_1) = f(B_2) = -3$$