PTC3420 - Programação Matemática Aplicada a Controle

Análise de Sensibilidade

PTC - EPUSP

Aula 15 - 2020

Agradecimento: Agradeço a Profa. Celma Ribeiro pelos arquivos latex do curso PRO-3341, usados na preparação das aulas desse curso.

Análise de Sensibilidade

Considere que o problema na forma padrão foi resolvido:

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Com matriz básica ótima B.

Pergunta: O que acontece com a solução ótima quando houver alterações nos coeficientes do problema original?

Análise de Sensibilidade

Considere que o problema na forma padrão foi resolvido:

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Com matriz básica ótima B.

Pergunta: O que acontece com a solução ótima quando houver alterações nos coeficientes do problema original?

Situações possíveis:

1. Mudança no vetor b (lado direito)
2. Mudança na função objetivo e
3. Inclusão de uma nova variável
4. Inclusão de uma nova restrição
5. Alterações na matriz de coeficientes

Análise de Sensibilidade

A- Mudança no lado direito

Considere que o problema na forma padrão foi resolvido:

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Com matriz básica ótima B.

Mudança no lado direito

- Alterar o lado direito não afeta as condições de otimalidade da solução. Pode afetar a viabilidade.
- A base atual do tableau permanece viável e ótima enquanto o lado direito de cada restrição permanece não negativo.
- Se algum elemento do lado direito ficar negativo, a base atual será inviável

Análise de Sensibilidade

$x_1 \to$ quant. soldados
$x_2 \to$ " trens

Considere o problema

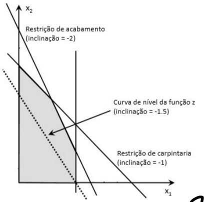
$$
\begin{array}{llllll}
 & \overset{c_1}{\downarrow} & \overset{c_2}{\downarrow} & & & \\
\max z = & 3x_1 & + 2x_2 & & & \\
\text{s.a} & 2x_1 & + 1x_2 & \leq & 100 & \text{Acabamento} \quad \Delta_1 \\
 & x_1 & + x_2 & \leq & 80 & \text{Carpintaria} \\
 & x_1 & & \leq & 40 & \text{Demanda} \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

Fonte:Prof. Volmir Eugênio Wilhelm e Professora Mariana Kleina

$b_2^{novo} = b_2 + \Delta_2 = 80 + \Delta_2$

$b^{novo} = b + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_2$

$B^{-1} b = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Delta_2 \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 60 + 2\Delta_2 \geq 0 \\ 20 + \Delta_2 \geq 0 \\ 20 - \Delta_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -20 \leq \Delta_2 \leq 20 \\ 60 \leq b_2 \leq 100 \end{array}$

$\begin{cases} x_1^* = 20 - \Delta_2 \\ x_2^* = 60 + 2\Delta_2 \end{cases} \quad z^* = 180 + \Delta_2$

Quanto é possível reduzir a mão de obra de acabamento ou carpintaria, mantendo a solução ótima?

T1:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
-3	-2	0	0	0	0
2	1	1	0	0	100
1	1	0	1	0	80
1	0	0	0	1	40

T2:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
0	-2	0	0	3	120
0	1	1	0	-2	20
0	1	0	1	-1	40
1	0	0	0	1	40

T3:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
0	0	2	0	-1	160
0	1	1	0	-2	20
0	0	-1	1	1	20
1	0	0	0	1	40

T4:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
0	0	1	1	0	180
0	1	-1	2	0	60
0	0	-1	1	1	20
1	0	1	-1	0	20

$z^* = 180$, $x_1^* = 20$, $x_2^* = 60$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 20$

$\Rightarrow$

x_B	x_N	z
0	$c_B^t B^{-1} N - c_N^t$	$c_B^t B^{-1} b$
I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

$$b_1^{novo} = b_1 + \Delta_1$$

$$B = \begin{array}{ccc} a_2 & a_5 & a_1 \end{array}$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} b^{novo} \geq 0, \quad b^{novo} = b + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_1$$

$$B^{-1} b^{novo} = B^{-1} b + B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_1 = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta_1 \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$60 - \Delta_1 \geq 0$$
$$20 - \Delta_1 \geq 0$$
$$20 + \Delta_1 \geq 0$$

$\Rightarrow$ $-20 \leq \Delta_1 \leq 20$, $80 \leq b_1 \leq 120$ $\Rightarrow$ $x_1^* = 20 + \Delta_1$, $x_2^* = 60 - \Delta_1$

$x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 20 - \Delta_1$

Análise de Sensibilidade

$c_B' = [c_2\ c_5\ c_1] = [2\ 0\ 3]$

$c_B' B^{-1} = [2\ 0\ 3] \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$= [1\ 1\ 0]$

$z^* = c_B' B^{-1} b^{novo} = \underbrace{c_B' B^{-1} b}_{180} + c_B' B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_1$

$z^* = 180 + \Delta_1$ OK

$z^* = 3x_1^* + 2x_2^* =$

$180 + 3\Delta_1 - 2\Delta_1 = 180 + \Delta_1$

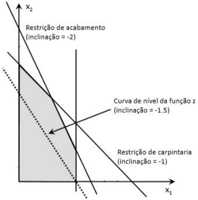


Tabela ótima

Básicas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
z	1	0	0	1	1	0	180
x_2	0	0	1	-1	2	0	60
s_3	0	0	0	-1	1	1	20
x_1	0	1	0	1	-1	0	20

Análise de Sensibilidade

1. Qual a matriz básica, B?
2. Escreva o lado direito da tabela em função de B
3. O que acontece se reduzirmos a mão de obra de carpintaria a 60hs/mês? Até quanto podemos reduzir a mão de obra mantendo a solução ótima? E para o acabamento?

z	x_B	x_N	Básicas
1	0	$-\Gamma'_N$	$c'_B B^{-1} b$
0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

$$-\Gamma'_N = (c'_B B^{-1} N - c'_N)$$

x_B	x_N	z
0	$c_B' B^{-1} N - c_N'$	$c_B' B^{-1} b$
I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

Ótimo:

Maximização

$c_B' B^{-1} N - c_N' \geq 0$

Minimização

$c_B' B^{-1} N - c_N' \leq 0$

$b \to b^{novo}$ B é ótima se

$$B^{-1} b^{novo} \geq 0$$

Factibilidade é preservada

$c \to c^{novo}$ B é ótima se (maximização)

$$c_B^{novo'} B^{-1} N - c_N^{novo'} \geq 0$$

Minimização: $c_B^{novo'} B^{-1} N - c_N^{novo'} \leq 0$

$$B^{-1}b^{\text{novo}} = B^{-1}\left(b + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\Delta\right) = B^{-1}b + B^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\Delta$$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix}24\\8\\2\end{bmatrix}, \quad B^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\-0{,}5\end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}b^{\text{novo}} = \begin{bmatrix}24+2\Delta\\8+2\Delta\\2-\frac{1}{2}\Delta\end{bmatrix} \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\cancel{24+2\Delta \geq 0}\\ 8+2\Delta \geq 0\\ 2-\frac{1}{2}\Delta \geq 0\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}-4 \leq \Delta \leq 4\\ 16 \leq b_2 \leq 24\end{array}$$

$$x_4^* = 24+2\Delta$$
$$x_5^* = x_6^* = 0$$

$$x_1^* = 2 - \frac{1}{2}\Delta, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 8+2\Delta,$$

$$z^* = 60\left(2-\frac{1}{2}\Delta\right) + 30.\cancel{x_2^*}\ 0 + 20.(8+2\Delta) = 280 + 10\Delta$$

ou $$z^* = c_B' B^{-1} b^{\text{novo}} = \underbrace{c_B' B^{-1} b}_{280} + \underbrace{c_B' B^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{10}\Delta = 280 + 10\Delta$$

$$c_B' B^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 20 & 60\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\-0{,}5\end{bmatrix} = 10$$

Exercício 2

Considere o problema que visa maximizar o lucro de uma fábrica que produz três produtos e possui restrições em seus insumos:

$$
\begin{array}{lllll}
 & c_1 & c_2 & c_3 & \\
\text{max z} = & 60x_1 & +\ 30x_2 & +\ 20x_3 & \\
\text{s.a} & 8x_1 & +\ 6x_2 & +\ x_3 & \leq 48 \\
 & 4x_1 & +\ 2x_2 & +\ 1.5x_3 & \leq 20 \\
 & 2x_1 & +\ 1.5x_2 & +\ 0.5x_3 & \leq 8 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{cases}
\underline{c_3 \to c_3 + \delta_3} \to x_3 \text{ é básica} \\
\underline{c_2 \to c_2 + \lambda_2} \to x_2 \text{ é não básica}
\end{cases}
$$

Análise de Sensibilidade

Tableau Ótimo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z
0	5	0	0	30	10	280
0	-2	0	1	2	-8	24
0	-2	1	0	2	-4	8
1	1,25	0	0	-0,5	1,5	2

Maximização

$x_1^* = 2, \; x_2^* = 0 = x_5^* = x_6$

$x_3^* = 8 \quad x_4^* = 24$

Tabela ótima $\quad z^* = 280$

Até quanto é possível reduzir o valor de b_2 mantendo otimalidade da base?

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_4 & a_3 & a_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1,5 & 4 \\ 0 & 0,5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_2 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1,5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad B^{-1}N = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1,25 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix}$$

$c_B' = [0 \;\; 20 \;\; 60], \quad c_N' = [30 \;\; 0 \;\; 0]$

Análise de Sensibilidade

$b_2^{novo} = b_2 + \Delta = 20 + \Delta$

Considere uma alteração no lado direito, i.e., $b^{novo} = b + \Delta b$ Vimos que $x_B = B^{-1}b$ Então $x_B = B^{-1}(b + \Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}(\Delta b)$
Exemplo: Considere que no problema original, ao invés de uma capacidade $b_2 = 20$, tivéssemos $b_2^{novo} = 20 + \Delta$
Temos:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$b^{novo} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 + \Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_B^{novo} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\Delta \\ 2\Delta \\ -0,5\Delta \end{bmatrix}$$

Análise de Sensibilidade - 4

Para que a base permaneça viável deve-se ter:

$$x_B^{novo} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\Delta \\ 2\Delta \\ -0,5\Delta \end{bmatrix} \geq 0$$

E portanto:

$$\Delta \geq -12 \quad \Delta \geq -4 \quad \Delta \leq 4$$

ou seja

$$\Delta \in [-4; 4]$$

Tome, por exemplo, $\Delta = 1$

Valor da Função objetivo com o novo lado direito

Valor da função objetivo na solução ótima: $c'x = c'_B B^{-1} b$
Considerando o novo lado direito:

$$c'x = c'_B B^{-1}(b + \Delta b) = c'_B B^{-1} b + c'_B B^{-1}(\Delta b)$$

$$c'_B B^{-1} b + c'_B B^{-1} \Delta b =$$

$$280 + \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\Delta \\ 2\Delta \\ -0,5\Delta \end{bmatrix} = 280 + 40\Delta - 30\Delta$$

B - Mudança na função objetivo

Considere que o problema na forma padrão foi resolvido:

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Com matriz básica ótima B.

Mudança na função objetivo

Dois casos:

- Mudança em coeficiente associado à base c_B
- Mudança em coeficiente associado variável não básica c_N

B - Mudança na função objetivo

- Alterar função objetivo não afeta a viabilidade.
- A base atual do tableau permanece viável.
- Pode-se perder otimalidade
- Valor da função objetivo pode mudar

Tableau ótimo

x_B	x_N	z
0	$c_B' B^{-1} N - c_N'$	$c_B' B^{-1} b$
I	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$

Maximização: $\underline{c_B' B^{-1} N - c_N' \geq 0}$

Minimização: $c_B' B^{-1} N - c_N' \leq 0$

I - Mudança em coeficientes associados às variáveis básicas

- Os coeficientes associados às variáveis básicas (linha zero) na tabela ótima continuam iguais a zero (por que?)
- O valor da função objetivo é alterado
- Os coeficientes associados às variáveis não básicas mudam

z	x_B	x_N	Básicas
1	0	$-\Gamma'_N$	$c'_B B^{-1} b$
0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

$$-\Gamma'_N = (c'_B B^{-1} N - c'_N)$$

$$\max\ 3x_1 + 2x_2$$

s.a. $2x_1 + x_2 \leq 100$

$x_1 + x_2 \leq 80$

$x_1 \leq 40$

$x_i \geq 0$

Tableau ótimo: $c'_B = \begin{array}{ccc} c_2 & c_5 & c_1 \\ \end{array}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{array}{ccc} a_2 & a_5 & a_1 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{array}{cc} a_3 & a_4 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tableau Ótimo:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
0	0	1	1	0	180
0	1	-1	2	0	60
0	0	-1	1	1	20
1	0	1	-1	0	20

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c_B' B^{-1} N - c_N' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1^{novo} = c_1 + \lambda_1 \Rightarrow c_B^{novo'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_2 & c_5 & c_1^{novo} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3+\lambda_1 \end{bmatrix} \end{array} = \boxed{c_B' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda_1}$$

$$c_B^{novo'} B^{-1} N - c_N' = c_B' B^{-1} N - c_N' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B^{-1} N \lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\lambda_1 \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 + \lambda_1 \geq 0, \quad 1 - \lambda_1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} -1 \leq \lambda_1 \leq 1 \\ 2 \leq c_1 \leq 4 \end{array}} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^* = 20 \\ x_2^* = 60 \end{array}$$

$$z^* = (c_1 + \lambda_1) x_1^* + c_2 x_2^* = 180 + 20\lambda_1 \quad \text{ou}$$

$$z^* = c_B^{novo'} B^{-1} b = \underbrace{c_B' B^{-1} b}_{180} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B^{-1} b \, \lambda_1$$

$$= 180 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} \lambda_1 = 180 + 20\lambda_1$$

Exercício: $c_2^{novo} = c_2 + \lambda_2$, $c_B^{novo'} = [2+\lambda_2 \;\; 0 \;\; 3]$

$$c_B^{novo'} = c_B' + [1 \;\; 0 \;\; 0]\lambda_2$$

$$c_B^{novo'} B^{-1}N - c_N' = \underbrace{c_B' B^{-1}N - c_N'}_{[1 \;\; 1]} + \underbrace{[1 \;\; 0 \;\; 0]B^{-1}N}_{[-1 \;\; 2]}\lambda_2 \geq [0 \;\; 0]$$

$$[1 \;\; 1] + [-1 \;\; 2]\lambda_2 = [1-\lambda_2 \;\;\; 1+2\lambda_2] \geq [0 \;\; 0] \Rightarrow \begin{matrix} 1-\lambda_2 \geq 0 \\ 1+2\lambda_2 \geq 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq \lambda_2 \leq 1 \\ \frac{3}{2} \leq c_2 \leq 3 \end{cases} \qquad x_1^* = 20 \quad x_2^* = 60$$

$$z^* = 3 \cdot 20 + (2+\lambda_2)60 = 180 + 60\lambda_2$$

ou

$$z^* = c_B^{novo'} B^{-1} b = 180 + [1 \;\; 0 \;\; 0]\begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}\lambda_2 = 180 + 60\lambda_2$$

OK

$$c_{3} \leftrightarrow c_3+\lambda_3 \Rightarrow c_3^{novo} = 20+\lambda_3 \Rightarrow c_B^{novo'} = [0 \;\; \underline{c_3+\lambda_3} \;\; 60]$$

30

$$c_B^{novo'} = [0 \;\; 20 \;\; 60] + \lambda_3 [0 \;\; 1 \;\; 0] = c_B' + \lambda_3 [0 \;\; 1 \;\; 0]$$

$$c_B^{novo'} B^{-1} N - c_N' = \underbrace{c_B' B^{-1} N - c_N'}_{[5 \;\; 10 \;\; 10]} + \lambda_3 [0 \;\; 1 \;\; 0] B^{-1} N$$

$$[5 \;\; 10 \;\; 10] + \lambda_3 [-2 \;\; 2 \;\; -4] \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 5 - 2\lambda_3 \geq 0 \\ 10 + 2\lambda_3 \geq 0 \\ 10 - 4\lambda_3 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_3 \leq 5/2 \\ -5 \leq \lambda_3 \\ \lambda_3 \leq 5/2 \end{array} \Rightarrow -5 \leq \lambda_3 \leq 5/2$$

$$15 \leq c_3 \leq 45/2$$

$$z^{*novo} = c_B^{novo'} B^{-1} b = z^* + \lambda_3 [0 \;\; 1 \;\; 0] \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = 280 + 8\lambda_3$$

ou

$$z^{*novo} = 60 \cdot 2 + (20+\lambda_3) 8 = 280 + 8\lambda_3$$

$$c_2^{novo} = c_2 + \lambda_2 \Rightarrow c_N' = [c_2 \;\; c_5 \;\; c_6] \Rightarrow c_N^{novo'} = c_N' + \lambda_2 [1 \;\; 0 \;\; 0] \quad x^*, z^* \text{ iguais!}$$

$$c_B' B^{-1} N - c_N^{novo'} = [5 \;\; 10 \;\; 10] - \lambda_2 [1 \;\; 0 \;\; 0] \geq [0 \;\; 0 \;\; 0] \Rightarrow \lambda_2 \leq 5 \Leftrightarrow c_2 \leq 35$$

II - Mudança em coeficientes associados às variáveis não básicas

- Os coeficientes associados às variáveis básicas (linha zero) na tabela ótima continuam iguais a zero (por que?)
- O valor da função objetivo **não** é alterado
- Os coeficientes associados às variáveis não básicas mudam

z	x_B	x_N	Básicas
1	0	$-\Gamma'_N$	$c'_B B^{-1} b$
0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

$$-\Gamma'_N = \left(c'_B B^{-1} N - c'_N\right)$$

Análise de Sensibilidade

No exercício 2, determine para que valores de coeficiente associado a x_3 a solução permanece ótima

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
z	1	0	5	0	0	10	10	280
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$1,25$	0	0	$-0,5$	$1,5$	2

Análise de Sensibilidade

No exercício 2, determine para que valores de coeficiente associado a x_3 a solução permanece ótima

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
z	1	0	5	0	0	10	10	280
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$1,25$	0	0	$-0,5$	$1,5$	2

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix}$$

$$c_B^t = \begin{bmatrix} 0 & c_3^{novo} & 60 \end{bmatrix} \qquad c_N = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c_B' B^{-1} N - c_N') =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & c_3^{novo} & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1.25 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Análise de Sensibilidade

$$-\Gamma'_N = \left(c'_B B^{-1} N - c'_N\right) =$$

$$\left(\left[\begin{array}{ccc} -2c_3^{novo} + 75 & 2c_3^{novo} - 30 & -4c_3^{novo} + 90 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{ccc} 30 & 0 & 0 \end{array}\right]\right) \geq 0$$

Se $15 \leq c_3^{novo} \leq 45/2$ a solução permanece ótima
O que acontece se $c_3^{novo} = 40$?

II - Mudança em coeficientes associados às variáveis não básicas

No exercício 2, determine para que valores de coeficiente associado a x_2 a solução permanece ótima

$$c_B^t = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 20 & 60 \end{array}\right] \qquad c_N = \left[\begin{array}{ccc} c_2^{novo} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$-\Gamma_N' \geq 0 \Rightarrow c_2^{novo} \leq 35$$

Ou seja, se $c_2^{novo} \leq 35$ a solução permanece ótima

O que acontece se $c_2^{novo} = 40$?

Análise de Sensibilidade

C - Inclusão de uma nova variável

Considere que o problema na forma padrão foi resolvido:

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Com $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e matriz básica ótima B.

Situações possíveis com a introdução de uma nova variável:

- Problema original inviável pode se tornar viável
- Problema original viável se mantém viável
- Solução básica (B) se mantém viável
- Solução básica (B) pode, ou não, se manter ótima

Análise de Sensibilidade

Em cada iteração o tableau, é dado por:

z	x	Básicas
1	$-\Gamma^t$	$c'_B B^{-1}b$
0	$B^{-1}A$	$B^{-1}b$

Com $\Gamma = c - A^t\left(\left(B^{-1}\right)^t c_B\right) \Rightarrow \Gamma^t = c^t - c_B^t B^{-1}A$

Chame de A^k a coluna da matriz A associada à variável x_k.

Com isso, a coluna do tableau associada à variável x_j será :

$$\left[\begin{array}{c} -\Gamma_j \\ \hline B^{-1}A^j \end{array}\right]$$

Isso vale para a nova matriz também, com a nova coluna!!!

Note que $\Gamma_j = c_j - \left(A^j\right)^t \left(B^{-1}\right)^t c_B = c_j - c_B^t B^{-1}A^j$

Análise de Sensibilidade

A inclusão de uma nova variável, x_{n+1}, transforma o problema em

$$
\begin{array}{ll}
\min & c'x + (c_{n+1}x_{n+1}) \\
 & Ax + A^{n+1}x_{n+1} = b \\
 & x \geq 0 \quad x_{n+1} \geq 0
\end{array}
$$

Análise de Sensibilidade

Na forma matricial, o problema com a nova variável se escreve como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{c}'\tilde{x} \\ & \tilde{A}\tilde{x} = b \\ & \tilde{x} \geq 0 \end{aligned}$$

com:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cc} A & A^{n+1} \end{array} \right]$$

$$\tilde{c} = \left[\begin{array}{c} c \\ c_{n+1} \end{array} \right]$$

$$\tilde{x} = \left[\begin{array}{c} x \\ x_{n+1} \end{array} \right]$$

Análise de Sensibilidade

Consequentemente a coluna associada à nova variável no tableau será

$$\left[\frac{-\Gamma_{n+1}}{B^{-1}A^{n+1}}\right]$$

$$\Gamma_{n+1} = c_{n+1} - \left(A^{n+1}\right)^t \left(B^{-1}\right)^t c_B$$

ou ainda

$$\Gamma_j = c_j - \left(A^j\right)^t \left(B^{-1}\right)^t c_B$$

A partir da nova tabela do simplex, com a inclusão dessa nova coluna, decide-se se a base B é ótima ou não, e se é necessária nova iteração.

Análise de Sensibilidade

Ainda em relação ao exercício 2, considere que é possível fabricar um novo produto que é vendido por R$15 e utiliza uma unidade do insumo 1, uma do insumo 2 e uma do insumo 3. Vale a pena fabricá-lo?

$$
\begin{array}{llllll}
\text{max z} = & 60x_1 & +\ 30x_2 & +\ 20x_3 & +\ 15x_4 & \\
\text{s.a} & 8x_1 & +\ 6x_2 & +\ x_3 & +1x_4 & \leq 48 \text{ Insumo 1} \\
 & 4x_1 & +\ 2x_2 & +\ 1.5x_3 & +1x_4 & \leq 20 \text{ Insumo 2} \\
 & 2x_1 & +\ 1.5x_2 & +\ 0.5x_3 & +1x_4 & \leq 8 \text{ Insumo 3} \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

Análise de Sensibilidade

Temos:

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c_4 = 15$$

Da tabela ótima:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \qquad c_B^t = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60 \end{bmatrix}$$

Além disso,

$$\Gamma_4 = c_4 - \left(A^4\right)^t \left(B^{-1}\right)^t c_B = c_4 - c'_B B^{-1} A^4$$

Análise de Sensibilidade

$$\Gamma_4 = c_4 - c_B' B^{-1} A^4$$

$$\Gamma_4 = 15 - \left[\begin{array}{ccc} 0 & 20 & 60 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right] = -5$$

Não vale a pena produzir o produto 4!!!

$$B^{-1} A^4 = \left[\begin{array}{c} 4 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right]$$

Análise de Sensibilidade

Se o preço de venda fosse R$25 o que aconteceria?

$$\Gamma_4 = 25 - \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$$

Vale a pena produzir o produto 4!!!

Nova tabela do simplex:

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
z	1	0	5	0	-5	0	10	10	280
s_1	0	0	-2	0	4	1	2	-8	24
x_3	0	0	-2	1	-2	0	2	-4	8
x_1	0	1	1,25	0	1	0	$-0,5$	1,5	2

Continue!

Análise de Sensibilidade

D- Inclusão de uma nova restrição

Situações em relação ao conjunto de pontos viáveis:

Problema original	Novo problema	
Inviável	Inviável	Sempre
Viável	Inviável	Possível
Viável	Viável	Possível

Situações em relação à solução ótima

Problema original	Novo problema	
Ilimitado	Ilimitado	Possível
Ilimitado	Tem solução ótima	Possível
Tem solução ótima	Tem solução ótima	Possível
Tem solução ótima	Inviável	Possível

Exercício: Dê um exemplo de cada uma das situações acima, representando-as graficamente.

Caso I - Restrição de desigualdade

Sendo A_{m+1} e b_{m+1} respectivamente os coeficientes da restrição e o lado direito, tem-se

$$A_{m+1}x \leq b_{m+1}$$

Considerando a variável de folga,

$$A_{m+1}x + s_{m+1} = b_{m+1}$$

o problema na forma matricial se escreve como:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{m+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b_{m+1} \end{bmatrix}$$

O problema agora possui dimensão $m+1$ a precisamos encontrar uma nova base. A variável de folga nesse caso poderá completar a base.

Análise de Sensibilidade

$x_3 \leq 10$

No exercício 2 considere a restrição $x_3 \leq 4$. A tabela ótima era:

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
z	1	0	5	0	0	10	10	280
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	0	1	$1,25$	0	0	$-0,5$	$1,5$	2

continua ótima

Com a nova restrição:

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	
z	1	0	5	0	0	10	10	0	280
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x_1	0	1	$1,25$	0	0	$-0,5$	$1,5$	0	2
s_4	0	0	0	1	0	0	0	1	4

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	
z	1	0	5	0	0	10	10	0	280
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x_1	0	1	$1,25$	0	0	$-0,5$	$1,5$	0	2
s_4	0	0	0	1	0	0	0	1	4

Na coluna associadada a x_3 deve aparecer uma coluna da identidade $\Rightarrow$ **Pivotação**

Básicas	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	
z	1	0	5	0	0	10	10	0	280
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	1	24
x_3	0	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x_1	0	1	$1,25$	0	0	$-0,5$	$1,5$	0	2
s_4	0	0	2	0	0	-2	4	0	-4

O ponto não é mais viável!!!! O que fazer?

$\boxed{\text{Dualidade - veremos adiante}}$

Caso II - Restrição de igualdade
Nesse caso, se necessário, é introduzida uma variável artificial e procede-se como no caso anterior com o problema fase zero.

.

Análise de Sensibilidade

E- Alterações na matriz de coeficientes

Pode acontecer qualquer coisa!!!

Serão vistos dois casos:

1. Mudança em coeficiente associado a variáveis **não** básicas
2. Mudança em coeficiente associado a variáveis básicas

Análise de Sensibilidade

I - Mudança em coeficiente de uma coluna associada a variáveis não básicas

Chame de $\tilde{A}^\kappa$ a nova coluna

A coluna associada essa variável κ no tableau será

$$\left[\frac{-\Gamma_\kappa}{B^{-1}\tilde{A}^\kappa}\right]$$

com

$$\Gamma_\kappa = c_\kappa - \left(\tilde{A}^\kappa\right)^t \left(B^{-1}\right)^t c_B$$

Se $-\Gamma_\kappa \leq 0$ a base ótima se mantém ótima. Caso contrário realiza-se uma nova iteração do simplex com a nova coluna modificada.

Análise de Sensibilidade

No exemplo 2, considere que uma alteração no produto 2 modificou o uso de insumos, alterando o problema:

$$\begin{array}{llllll}
\text{max z} = & 60x_1 & +\ 30x_2 & +\ 20x_3 & \\
\text{s.a} & 8x_1 & +\ \boxed{5}x_2 & +\ x_3 & \leq 48 \\
& 4x_1 & +\ 2x_2 & +\ 1.5x_3 & \leq 20 \\
& 2x_1 & +\ \boxed{4}x_2 & & \leq 5 \\
& x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 &
\end{array}$$

$$\Gamma_2 = c_2 - c'_B B^{-1} \tilde{A}^2$$

Análise de Sensibilidade

$$\Gamma_2 = c_2 - c_B' B^{-1} \tilde{A}^2$$

$$\Gamma_2 = 30 - \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -30$$

A solução permanece ótima!!!

I - Mudança em coeficiente de uma coluna associada a variáveis básicas

Nesse caso, a matriz B pode até mesmo deixar de ser inversível....