Resolução de equações Diferenciais por series

Consideremos a Eq. homogenea

Sao Eq. lineares

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \qquad (1)$$

com P, Q, R polinomios. Pode ser visto que método também funciona quando P, Q e R são funções analiticas genericas.

Agora assumimos que P, Q, R são polinomios que não tem fatores comuns. Suponha que queremos resolver (1) numa vizinhança de ponto x_0. A solução da eq. (1) num intervalo contendo x_0, está relacionado ao comportamento de P nesse intervalo.

Def: um ponto x_0 no qual $P(x_0) \neq 0$ e' chamado de ponto ordinario. Como P e' continuo, segue que ∃ um intervalo em torno de x_0 no qual $P(x)$ nunca se anula. ie podemos:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

onde $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, $q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$ são funções continuas.

Def: se $P(x_0) = 0$, então x_0 e' chamado de ponto singular de equação (1).

Queremos a seguir achar soluções da Eq (1) ~~numa~~ vizinhança de um ponto ordinario x_0. Procuramos soluções da forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

e supomos que a serie converge no intervalo $|x-x_0| < \rho$ para algum $\rho > 0$.

Ex: 1 Encontre uma solução em série para a eq.

$$y'' + y = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sol: nos já conhecemos que $y_1 = \cos x$, $y_2 = \operatorname{sen} x$ são soluções

$$r^2 + 1 = 0$$
$$\downarrow$$
$$r^2 = -1 \Rightarrow r = \pm i$$

L.I da eq. e que a sol. geral é: $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$.

Por série: $P(x) = 1 \Rightarrow$ todo o ponto x são ordinários.

vamos procurar uma solução em forma de série de potência em torno de $x_0 = 0$. ie:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

e supor que ela converge em algum intervalo $|x| < \rho$.

$$y' = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y'' = 2a_2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\Rightarrow 0 = y'' + y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Devemos screver uma delas de tal forma que tenham o mesmo termo geral: Começando a soma em 0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + a_n \right] x^n = 0 \quad \Leftrightarrow$$

ie:

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} + a_n = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$
$$\downarrow$$
$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+1)(n+2)}$$

$n=0: \quad a_2 = -\dfrac{a_0}{1.2} = -\dfrac{a_0}{2}$

$n=1: \quad a_3 = -\dfrac{a_1}{2.3}$

$n=2: \quad a_4 = \dfrac{-a_2}{3.4} = -\dfrac{1}{3.4}\left(-\dfrac{a_0}{2}\right) = \dfrac{a_0}{2.3.4}$

$n=3: \quad a_5 = \dfrac{-a_3}{4.5} = -\dfrac{1}{4.5}\left(-\dfrac{a_1}{2.3}\right) = \dfrac{a_1}{2.3.4.5}$

ie: $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k a_0}{(2k)!}, \quad k = 1,2,3,\ldots$ ie para n par $n=2k$.

provar por indução matemática.

e, $a_{2k+1} = \dfrac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!}, \quad k = 1,2,3,\ldots$

$$\Rightarrow y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2}x^2 - \frac{a_1}{2.3}x^3 + \frac{a_0}{2.3.4}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$$

$$= a_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right] + a_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right] =$$

$$= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

série de taylor para cos x em torno de x=0. a 2ª é a série de taylor para sen x em torno de x=0.

2) $y'' - x^2 y = 0$. Achar a sol. geral da eq. em série de potência centrada em 0.

sol: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \iff$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

$$2(2-1) a_2 x^0 + 3(2) a_3 x + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

$$2a_2 + 2.3\, a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 0$$

$$2a_2 + 2.3\, a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} - a_{n-2}\right] x^n = 0$$

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 2 \ldots$$

$$\Rightarrow a_4 = \frac{a_0}{3.4}, \quad a_5 = \frac{a_1}{4.5}, \quad a_6 = \frac{a_2}{5.6} = 0$$

$$a_7 = \frac{a_3}{6.7} = 0, \quad a_8 = \frac{a_4}{7.8} = \frac{a_0}{3.4.7.8}$$

$$a_9 = \frac{a_5}{8.9} = \frac{a_1}{4.5.8.9} \quad \ldots$$

ie: $$a_{4k} = \frac{a_0}{3.4.7.8 \ldots (4k-5)(4k-4)(4k-1)(4k)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$(4k-8)(4k-9)$

$$a_{4k+1} = \frac{a_1}{4.5.8.9 \ldots (4k-3)(4k-4)(4k)(4k+1)}; \quad k = 1, 2 \ldots$$

$11\,(12)$ $$a_{12} = \frac{a_0}{3.4.7.8.(11)(12)}$$

$$\Rightarrow \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots =$$

$$= a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{3.4} x^4 + \frac{a_1}{4.5} x^5 + \frac{a_0}{3.4.7.8} x^8 + \frac{a_1}{4.5.8.9} x^9 + \dots$$

$$= a_0 \left[\frac{x^4}{3.4} + \frac{x^8}{3.4.7.8} + \dots + \dots \right] +$$

$$+ a_1 \left[\frac{x^5}{4.5} + \frac{x^9}{4.5.8.9} + \dots + \dots \right] + a_0 + a_1 x =$$

$$= a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{3.4.7.8 \dots (4n-5)(4n-4)(4n-1)(4n)} +$$

$$+ a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4.5.8.9 \dots (4n-3)(4n-4)(4n)(4n+1)} + a_0 + a_1 x.$$

Devemos ver se as duas séries convergem teste da razão:

$$a_n = \frac{x^{4n}}{(4n)(4n-1)(4n-4)(4n-5) \dots 7.8.4.3}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{x^{4(n+1)}}{x^{4n}} \frac{\cancel{(4n)(4n-1)(4n-4)(4n-5) \dots 7.8.4.3}}{[4(n+1)][4n+3]\cancel{[4n][4n-1] \dots 7.8.4.3}} =$$

$4(n+1)-1$

$$= |x^4| \frac{1}{(4n+4)(4n+3)} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 0 < 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

ie, pelo critério da razão a série converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

Analogamente para a 2ª série:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{4(n+1)+1}}{x^{4n+1}} \cdot \frac{\cancel{(4n+1)(4n)(4n-4)(4n-3) \dots 9.8.5.4}}{[4(n+1)+1][4(n+1)]\cancel{[4n][4n+1] \dots 9.8.5.4}} =$$

$$= x^4 \cdot \frac{1}{(4n+5)(4n+4)} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 0 < 1,$$ logo pelo teste da razão a série converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

assim a solução geral da equação é:

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{3.4.7.8\ldots(4n-5)(4n-4)(4n-1)(4n)} \right] +$$
$$+ a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4.5.8.9\ldots(4n-3)(4n-4)(4n)(4n+1)} \right]$$

De fato, como ambas as séries convergem $\forall x$, $\Rightarrow$ chamando $y_1(x)$ e, $y_2(x)$ as funções somas das séries, vemos que y_1 e y_2 são soluções da Eq. (De fato no 1º caso escolhe $a_0 = 1$, e, $a_1 = 0$. e Depois $a_0 = 0$, e, $a_1 = 1$. também note que

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad e, \quad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, logo y_1, y_2 são L.I $\Rightarrow$

a solução geral da Eq é:

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Obs: Para generalizar para P, Q, R são funções analíticas. ie: vamos considerar que as funções $p = \frac{Q}{P}$, e, $q = \frac{R}{P}$ são analíticas em x_0 ponto ordinário da eq. (1). isto significa que $p(x)$, e, $q(x)$ tem expansões em séries de taylor que convergem em algum intervalo em torno de x_0, ie:

$$p(x) = p_0 + p_1(x - x_0) + \ldots + p_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n,$$

$$q(x) = q_0 + q_1(x-x_0) + \ldots + q_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n.$$

assim se $p = \frac{Q}{P}$ e $q = \frac{R}{P}$ forem analíticas em x_0, então x_0 é dito ponto ordinário da eq (1). Em caso contrário, é um ponto singular.

teo: se x_0 é um ponto ordinário da eq. diferencial (1),

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

isto é, se $p = \frac{Q}{P}$, e, $q = \frac{R}{P}$ são analíticas em x_0,
então a solução geral da equação (1) é:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

onde a_0, a_1 são arbitrários, e, y_1, y_2 são soluções em séries linearmente independentes que são analíticas em x_0.

obs: ① também podemos ~~solução~~ solucionar eq. (1) nas proximidades (na vizinhança) de pontos singulares. Mas os métodos não funcionam, por tanto requerem mais trabalho nos complicados, pois frequentemente as soluções da Eq. (1) não são analíticas em x_0, e, portanto não podem ser representadas por uma série de Taylor em potência de $x-x_0$

② também podemos solucionar eq Dif. linear de 1ª ordem através das séries de potências.