Equações Diferenciais lineares não-homogêneas com coeficientes constantes:

elas são da forma: $y'' + by' + cy = f(x)$, onde $f(x)$ é tal que $f(x) \neq 0$, e, b, c são constantes. (1)

A equação $y'' + by' + cy = 0$ é chamada a equação homogênea associada a $y'' + by' + cy = f(x)$.

¿ como são as soluções de $y'' + by' + cy = f(x)$?

A solução geral de $y'' + by' + cy = f(x)$ é da forma:

$$y = y_h + y_p$$

onde y_p é uma solução particular da equação dada, e, y_h é a solução geral da homogênea associada.

De fato: se $y_p = y_p(x)$, $x \in I$ é solução particular de $y'' + by' + cy = f(x)$, temos que $y_p'' + by_p' + cy_p = f(x)$.

Seja $y = y(x)$ outra solução de (1) $\Rightarrow$ $y - y_p$ é solução da homogênea associada. Por outro lado se $y = y(x)$ for tal que $y - y_p$ é solução da homogênea $\Rightarrow$ y será solução de (1).

Logo a solução geral de (1) é: $y = y_h + y_p$.

Agora tudo se reduz a achar a solução particular.

1) Método de variação das constantes:

Seja $y'' + by' + cy = f(x)$. A solução geral da homogênea associada é: $y_h = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)$, onde g_1 e g_2 são solução L.I da homogênea associada.

substituímos em y_h as constantes c_1 e c_2 por funções $u_1(x)$, $u_2(x)$, a serem determinados, de modo que

$$y_p = u_1(x)\, g_1(x) + u_2(x)\, g_2(x)$$ seja uma solução particular

de $y'' + by' + cy = f(x)$.

Para determinar $u_1(x)$, $u_2(x)$ vamos construir um sistema com duas equações com incógnitas $u_1'(x)$, $u_2'(x)$, tal sistema é:

$$\begin{cases} u_1' g_1 + u_2' g_2 = 0 \\ u_1' g_1' + u_2' g_2' = f(x) \end{cases}$$

Agora usando regra de Cramer temos que:

$$u_1(x) = -\int \frac{g_2(x) f(x)}{W(g_1, g_2)}\, dx, \qquad u_2(x) = \int \frac{g_1(x) f(x)}{W(g_1, g_2)}\, dx.$$

Logo a solução particular é:

$$y_p = u_1 g_1 + u_2 g_2 = -g_1(x) \int \frac{g_2(x) f(x)}{W(g_1, g_2)}\, dx + g_2(x) \int \frac{g_1(x) f(x)}{W(g_1, g_2)}\, dx.$$

<u>Exemplo</u>: $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$.

<u>Solução</u>: homogênea associada: $y'' + 2y' + y = 0$.

equação característica: $r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r = -1$ mult. 2.

Logo a solução geral da homogênea associada é:

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

Chame $g_1 = e^{-x}$, $g_2 = x e^{-x}$. Logo

$$W(g_1, g_2) = \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - x e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2t}. \quad \text{Logo}$$

$$y_p = -e^{-x} \int \frac{x e^{-x} e^{-x} \ln x}{e^{-2x}}\, dx + x e^{-x} \int \frac{e^{-x} e^{-x} \ln x}{e^{-2x}}\, dx =$$

$$= -e^{-x} \int x \ln x\, dx + x e^{-x} \int \ln x\, dx =$$

$u = x$, $dv = \ln x$

$\longrightarrow x \ln x - x$

$$y_p = -e^{-x}\frac{x^2}{2}\ln x + e^{-x}\frac{x^2}{4} + x^2e^{-x}\ln x - x^2e^{-x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}e^{-x}\ln x - \frac{3}{4}x^2e^{-x}.$$

Portanto a solução geral da equação $y''+2y'+y=e^{-x}\ln x$ é

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{x^2}{2}e^{-x}\ln x - \frac{3}{4}x^2e^{-x}.$$

Exemplo: $y''+2y'+5y = e^{-x}\sec(2x)$.

solução: homogênea associada: $y''+2y'+5y=0$, e sua equação característica é: $r^2+2r+5=0$, cujas raízes são:

$r_1=-1+2i$, $r_2=-1-2i$. Logo a solução geral da homogênea associada é: $y_h = c_1e^{-x}\cos(2x) + c_2e^{-x}\operatorname{sen}(2x)$,

chame $g_1 = e^{-x}\cos(2x)$, $g_2 = e^{-x}\operatorname{sen}(2x)$.

$W(g_1,g_2) = 2e^{-2x}$. Logo a solução particular é dada por:

$$y_p = -e^{-x}\cos(2x)\int \frac{e^{-x}\operatorname{sen}(2x)\,e^{-x}\sec(2x)}{2e^{-2x}}dx + e^{-x}\operatorname{sen}(2x)\int\frac{e^{-x}\cos(2x)\,e^{-x}\sec(2x)}{2e^{-2x}}dx$$

$$= -\frac{e^{-x}\cos(2x)}{2}\int \operatorname{sen}(2x)\sec(2x)\,dx + \frac{e^{-x}\operatorname{sen}(2x)}{2}\int\cos(2x)\sec(2x)\,dx$$

$$= -\frac{e^{-x}\cos(2x)}{2}\int\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}dx + e^{-x}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}x$$

$$= e^{-x}\frac{\cos(2x)}{4}\ln(\cos(2x)) + \frac{x}{2}e^{-x}\operatorname{sen}(2x).$$

Logo a solução geral da equação dada é:

$$y = c_1e^{-x}\cos(2x) + c_2e^{-x}\operatorname{sen}(2x) + \frac{e^{-x}}{4}\cos(2x)\ln(\cos(2x)) + \frac{x}{2}e^{-x}\operatorname{sen}(2x).$$

Equações diferenciais lineares de 2ª ordem homogênea e de coeficientes variáveis:

Elas são da forma: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$ (2)

onde p, q são funções contínuas que dependem de x.

¿ qual é a solução geral de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$?

HA: Se f, g são soluções linearmente independentes da equação

$\Rightarrow$ $y = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ é a solução geral da equação dada (2)

Exemplo: Equação de Euler:

$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$, onde α, β são constantes reais.

Assuma solução da forma: $y = x^r$ onde $r \in \mathbb{R}$.

① solução de $x^2y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$ é dada pelas raízes da equação característica. De fato: $y = x^r$, $y' = r x^{r-1}$
$y'' = r(r-1)x^{r-2}$.

Logo: $\cancel{x^2}\, r(r-1)\cancel{x^{r-2}} + \alpha x\, r x^{r-1} + \beta x^r = 0$

$$r(r-1)x^r + \alpha r x^r + \beta x^r = 0$$
$$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$
$$r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0, \rightarrow \text{Eq. característica.}$$

Exemplo: $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, $(x > 0)$

a equação característica: $r^2 + (-3-1)r + 4 = 0$
$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \Rightarrow$
$r = 2$ mult. 2.

Logo a solução geral é: $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 (\ln x)$.

pois estamos fazendo $e^{rt} = x^r \Leftrightarrow e^t = x \Leftrightarrow t = \ln x$.

e usamos a expressão da solução geral da equação homogênea de coeficientes constantes.

Exemplo: $x^2y'' + xy' - 4y = 0$, $(x>0)$.

solução: equação característica: $r^2 + (1-1)r - 4 = 0$

$r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2$.

Logo as soluções serão: $y_1(x) = x^2$ e, $y_2(x) = x^{-2}$.

As quais são L.I, pois $W(y_1, y_2) = -\frac{4}{x}$.

Logo a solução geral é: $y = c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$, $(x>0)$.

observação: De forma geral achar uma solução geral da homogênea com coeficientes variáveis é um problema complicado, e, existem diversos métodos para se achar a solução geral, por exemplo resolver usando serie de potências (ou de Taylor).

Equações Diferenciais linear de 2ª ordem, não-homogênea, com coeficientes variáveis:

são da forma: $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ (3)

onde p, q, r são definidos e contínuos num intervalo I.

A solução geral é: $y = y_h + y_p$, onde y_h é a solução geral da homogenea associada: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, e y_p é uma solução particular da equação (3).

As soluções particulares são identicamente obtidos com a fórmula de variação de parametro para o caso feito de coeficientes constantes, isto é:

Teorema: se as funções p, q e r forem contínuas, e se as funções y_1, y_2 forem soluções linearmente independentes da equação homogênea associada $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, então uma solução particular da não-homogênea (3) é:

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2(x)\, r(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx + y_2 \int \frac{y_1(x)\, r(x)}{W(y_1, y_2)}\, dx.$$

Exemplo: Determine a solução geral de:

$$x^2 y'' + x y' - 4y = x^3 \ln x, \qquad x > 0.$$

Solução: ela é não-homogênea, coeficientes variáveis, linear de 2ª ordem.

a homogênea associada: $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ $(x>0)$, cuja solução já foi obtida anteriormente: $y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$, $(x>0)$

por ser uma equação de euler.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -4/x$$, logo a solução particular é:

$$y_p = -x^2 \int \frac{x^{-2}(x \ln x)}{\left(-\frac{4}{x}\right)}\, dx + x^{-2} \int \frac{x^2 (x \ln x)}{\left(-\frac{4}{x}\right)}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{4} \int \ln x\, dx - \frac{x^{-2}}{4} \int x^4 \ln x\, dx = \frac{x^2}{4}\left[x \ln x - x\right] - \frac{x^{-2}}{4}\left[\frac{x^5}{5}\ln x - \frac{x^5}{25}\right]$$

$$= \frac{x^3}{5} \ln x - \frac{6}{25} x^3.$$

$$\int x^4 \ln x\, dx \underset{I}{=} \frac{x^5}{5} \ln x - \frac{x^5}{25}.$$

$u = \ln x \quad dv = x^4$

$du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{x^5}{5}$

Portanto a solução geral é:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2} + \frac{x^3}{5} \ln x - \frac{6}{25} x^3, \qquad (x > 0).$$

Exemplo: $xy'' - y' = 3x^2$

Solução: $y'' - \frac{y'}{x} = 3x$, $(x>0)$. ela é de coef. variáveis, não-homogênea, linear de 2ª ordem.

A homogênea associada: $y'' - \frac{y'}{x} = 0$.

Suponha solução da forma $y = x^r$. $\Rightarrow y' = rx^{r-1}$, $y'' = r(r-1)x^{r-2}$.

Logo: $r(r-1)x^{r-2} - \frac{rx^{r-1}}{x} = 0 \Leftrightarrow r(r-1) - r = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 2 \end{cases}$

$r^2 - r - r = 0$

$r(r-2) = 0$

Logo a solução da homogênea associada: $y_h = c_1 x^0 + c_2 x^2$

$= c_1 + c_2 x^2$.

Escolha $g_1 = 1$, $g_2 = x^2$, soluções linearmente independentes, com $W(1, x^2) = 2x$. Portanto uma solução particular da equação dada é:

$$y_p = -\int \frac{x^2(3x)}{W(1,x^2)}dx + x^2 \int \frac{3x}{W(1,x^2)}dx = -\frac{3}{2}\int x^2 dx + x^2 \frac{3}{2}\int dx$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 . x = -\frac{3}{2}x^3\left(\frac{1}{3} - 1\right) = x^3.$$

Logo a solução geral da equação dada é:

$$y = c_1 + c_2 x^2 + x^3.$$

Exemplo: $x^2 y'' + xy' - y = x^2$.

Solução: $y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 1$ com $(x>0)$.

Equação homogênea associada: $x^2 y'' + xy' - y = 0$ que é uma equação de Euler. Sua equação característica é:

$r(r-1) + r - 1 = 0$, ou, $r^2 - 1 = 0$, ou, $r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$

Portanto a solução geral da homogênea associada é:

$$y_h = c_1 x + c_2 x^{-1}.$$

Escolhendo $y_1 = x$, $y_2 = x^{-1}$, temos que uma solução particular da equação dada é:

$$y_p = -x \int \frac{x^{-1}(1)}{W(x, x^{-1})}\, dx + \frac{1}{x} \int \frac{x\,(1)}{W(x, x^{-1})}\, dx$$

Como $W(x, x^{-1}) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x}$, então

$$y_p = -x \int \left(-\frac{1}{2}\right) dx + \frac{1}{x} \int \left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = +\frac{x}{2}\, x - \frac{1}{2x}\, \frac{x^3}{3} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} x^2 = \frac{x^2}{3}.$$

Logo a solução geral da equação dada é:

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + \frac{x^2}{3}. \qquad (x > 0).$$