Teoremas de Fubini e Tonelli- IME-USP. MAT0234 Medida e Integração
Prof. Jorge Adrian Beloqui

0.1 Teoremas de Fubini para Integral de Riemann

O Teorema de Fubini relaciona a integral de uma função de duas ou mais variáveis com a integração iterada. Isto é, é um procedimento para ir integrando sucessivas vezes, mantendo algumas variáveis fixas e integrando as outras.

Teorema 1 (Fubini para a integral de Riemann)**.** *Seja* $f : D \subset R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *onde* D *é um domínio de integração e* $R = [a, b] \times [c, d]$ *retângulo em* $\mathbb{R}^2$ *limitado e tomamos* $D = \{(x, y) \in R \mid x \in [a, b]\ ,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ *onde* $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to [c, d]$ *são contínuas. Suponhamos que:*

1. *Existe* $\iint_D f dxdy$
2. *Para todo* $x \in [a, b]$ *existe* $A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$
3. *Existe* $\int_a^b A(x)dx$

Então

$$\iint_D f dxdy = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx$$

Uma **interpretação** deste Teorema, dada pela demonstração, é que a Massa da placa D com densidade f é a integral das massas das cordas (com as unidades adequadas) que resultam de intersectar D com as retas
$x\ =\ constante$.
Outra interpretação é que o volume do sólido de base D e altura f é a integral das áreas das fatias (com as unidades adequadas) que resultam de intersectar o sólido com as planos $x\ =\ constante$.
Por outro lado, no livro de J. Munkres, a versão oferecida é bem mais geral, prescindindo da integrabilidade interna:

Teorema de Fubini (para integrais de Riemann): Seja Q = A x B, onde A é um retângulo em $\mathbb{R}^k$ e B é um retângulo em $\mathbb{R}^n$. Seja $f : Q \to R$ uma função limitada f(x,y) onde $x\ \in\ A\ e\ y\ \in\ B$. Para cada $x\ \in\ A$ considere as integrais inferior e superior $\underline{\int}_{y\ \in\ B} f(x, y)$ e $\overline{\int}_{y\ \in\ B} f(x, y)$.
Se f for integrável em Q, então estas duas funções são integráveis em A e de x são integráveis sobre A, e

$$\int_Q (x, y)\ =\ \int_{x\ \in\ A} \underline{\int}_{y\ \in\ B} f(x, y)\ =\ \int_{x\ \in\ A} \overline{\int}_{y\ \in\ B} f(x, y)$$

Exercício. Analise a integrabilidade Riemann de

$$\begin{cases} f(x, y) =\ (x - y)/(x + y)^4;\ em\ [0, 1] \times [0, 1]\ e\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0\ em\ (0, 0) \end{cases}$$

0.2 Teoremas de Fubini e Tonelli para a Integral de Lebesgue

A ideia é dar estes teoremas como na integral de Riemann. Ou seja, em $X_1 \times X_2$ calcular uma integral calculando as sucessivas integrais iteradas. Ou seja, integrando uma variável por vez.
Sejam $(X_1, \mathcal{A}_1)$ e $(X_2, \mathcal{A}_2)$ dois espaços mensuráveis.

Definição 0.1. O conjunto $A \times B$ onde $A \in \mathcal{A}_1$ e $B \in \mathcal{A}_2$ é chamado de **retângulo** em $Z = X_1 \times X_2$.

Seja Z_0 a família das uniões finitas de retângulos.

Exercício. Mostrar que todo conjunto em Z_0 é união finita disjunta de retângulos em Z.

Lema 2. *Z_0 é uma álgebra de conjuntos de Z.*

Definição 0.2. Se $(X_1, \mathcal{A}_1)$ e $(X_2, \mathcal{A}_2)$ são espaços mensuráveis, então $\mathcal{Z} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ denota a σ-álgebra de Z gerada pelos retângulos $A \times B$ onde $A \in \mathcal{A}_1$ e $B \in \mathcal{A}_2$.

Observação: Se $\mathcal{A}_1$), $\mathcal{A}_2$) forem os Borelianos, então $\mathcal{Z}$ são os Borelianos de Z se X_1, X_2 separáveis, e Z tiver a topologia produto.
Queremos definir a pré-medida produto. Então dados $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ e $(X_2, \mathcal{A}_2, \nu)$ espaços de medida, definimos π_0 num retângulo $A \times B$ por

$$\pi_0(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

e estendemos para a álgebra Z_0, ou seja que dado um elemento E da álgebra Z_0, podemos supor que $E = \cup_{j=1}^{n}(A_j \times B_j)$, retângulos disjuntos. Definimos $\pi_0(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\nu(B_j)$.

Teorema 3 (Teorema da medida produto)**.** *Se π_0 for como acima ela estende-se a uma medida em $\mathcal{Z}$. Se as medidas forem σ-finitas, então a extensão é única.*

Demonstração. Primeiramente vejamos que π_0 é uma pré-medida. Ou seja, falta verificar que se o retângulo $A \times B$ for a união disjunta de $\{A_j \times B_j\}$ retângulos, então $\pi_0(A \times B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j)$. Suponhamos que o retângulo $A \times B$ é união disjunta de $\{A_j \times B_j\}$ retângulos. Mostremos que $\pi(A \times B) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi(A_j \times B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j)$. Consideremos as funções características respectivas. Temos $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)$. Por outro lado, fixando x e integrando em y a respeito de ν, aplicando o Teorema da Convergência Monótona, temos $g_k(y) = \sum_{j=1}^{k} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)$ sequência monótona não decrescente. Logo as integrais

$$\int g_k(y)d\nu = \sum_{j=1}^{k} \chi_{A_j}(x)\nu(B_j)$$

convergem para $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\nu(B_j)$ por um lado e por outro $\chi_A(x)\nu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\nu(B_j)$.

Com um argumento idêntico para a variável x obtemos que:

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j)$$

Deste modo π_0 está bem definida e se um conjunto $C = \cup_{j=1}^{\infty}(A_j \times B_j)$ estiver em Z_0 e $A_j \times B_j$ também, segue que estamos nas hipóteses do Teorema de Extensão. $\square$

Definição 0.3. Se E for um subconjunto de $X_1 \times X_2$ e $x \in X_1$ a **seção por** x de E é o conjunto

$$E_x = \{y \in X_2 \mid (x, y) \in E\}$$

Análogamente, se $y \in X_2$, então a **seção por** y de E é o conjunto:

$$E^y = \{x \in X_1 \mid (x, y) \in E\}$$

Definição 0.4. Se $f : X_1 \to X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in X_1$, a **seção por** x **de** f é a função $f_x : X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $f_x(y) = f(x, y)$ para todo $y \in X_2$.
Análogamente, a **seção por** y **de** f é a função $f^y : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $f^y(x) = f(x, y)$ para todo $x \in X_1$.

Lema 4.
1. *Se E é mensurável de $\mathcal{Z}$ então toda seção de E é mensurável.*
2. *Se $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ é função mensurável então toda seção de f é mensurável.*

0.3 Teorema de Tonelli

O teorema de Tonelli é para funções $F : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ não negativas e mensuráveis.

Teorema 5. *Sejam $(x_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ e $(X_1, \mathcal{A}_2, \nu)$ espaços de medida σ-finita e F mensurável, não negativa $F : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$. Então:*

1. *As funções $f(x) = \int_{X_2} F_x d\nu$ e $g(y) = \int_{X_1} F^y d\mu$ são mensuráveis.*
2. $\int_{X_1} f\, d\mu = \int_Z F\, d\pi = \int_{X_2} g\, d\nu$ *ou*

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} F d\nu \right) d\mu = \int_Z F d\pi = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} F d\mu \right) d\nu$$

Ou seja, a integral dupla é igual às duas integrais iteradas e garante a existência das integrais internas.

Observe que, como no Teorema da Convergência Monótona:

1. F deve ser não negativa.
2. As integrais podem ser finitas ou $+\infty$.

0.4 Teorema de Fubini

O teorema de Fubini é para funções F integráveis em $X_1 \times X_2$, mas não precisam preservar o sinal. Ele estabelece que se existe a integral dupla de F, então existem as integrais iteradas e são todas iguais.

Teorema 6. *Sejam $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ e $(X_2, \mathcal{A}_2, \nu)$ espaços de medida σ-finita e seja π em $\mathcal{Z}$ a medida produto de μ e ν. Seja $F : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ integrável com respeito a π. Então:*

1. *As funções a seguir a valores em $\overline{\mathbb{R}}$ estão definidas q.t.p:*

$$f(x) = \int_{X_2} F_x d\nu \ \ ; \ \ g(y) = \int_{X_1} F^y d\mu$$

2. *As duas têm integrais finitas e*

$$\int_{X_1} f(x)d\mu = \int_{Z} F d\pi = \int_{X_2} g(y)d\nu$$

Ou seja:

$$\int_{X_1} \left[\int_{X_2} F d\nu\right] d\mu = \int_{Z} F d\pi = \int_{X_2} \left[\int_{X_1} F d\mu\right] d\nu$$

Uma forma de usar estes Teoremas é: primeiro verificamos se $|f(x,y)|$ é integrável, mediante o Teorema de Tonelli. E se este for o caso, integramos $f(x,y)$ pelo Teorema de Fubini.

Exercício. Analise a integrabilidade Lebesgue de

$$\begin{cases} f(x,y) = \ (x-y)/(x+y)^4; \ \textit{em } [0,1]\times[0,1] \ \textit{e } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ \textit{em } (0,0) \end{cases} .$$

1 Teorema de Mudança de Variável

Sejam Ω, Ω_1 abertos de $\mathbb{R}^m$ e seja $\varphi : \Omega \to \Omega_1$ um difeomorfismo $\mathcal{C}^1$. Consideraremos Ω e Ω_1 com medidas de Lebesgue. $\Lambda(\Omega)$ e $\Lambda(\Omega_1)$ são as σ-álgebras de Lebesgue.

Teorema 7. *Nas hipóteses acima, dado $A \subset \Omega$ valem:*

1. *Se A é um boreliano de Ω, então $\varphi(A)$ é boreliano de Ω_1*

2. *Se $A \in \Lambda(\Omega)$ então $\varphi(A) \in \Lambda(\Omega_1)$ e*

$$\lambda(\varphi(A)) = \int_A |\det \varphi'(x)| dx$$

3. *Em particular, se $A \in \Lambda(\Omega)$ e $\lambda(A) = 0$ então $\lambda(\varphi(A)) = 0$*

4. *Se $A \in \Lambda(\Omega)$ e $f : \varphi(A) \to \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{C}$ for uma função λ-mensurável, segue que a função composta $f \circ \varphi : x \mapsto f\varphi(x)$ definida em A também é λ-mensurável e vale*

$$\int_{\varphi(A)} f(y)dy = \int_A |\det \varphi'(x)| f(\varphi(x))dx$$

tanto se f é semi-integrável ou integrável relativamente a λ. Isto ocorre se e somente se $g(x) = |\det \varphi'(x)| f(\varphi(x))$ forem semi-integráveis ou integráveis respectivamente.

Há outras versões to teorema de mudança de variável.

1. No caso da Integral de Riemann, admite-se que a "mudança" (ou difeomorfismo) seja injetor e $\det \varphi' \neq 0$ exceto talvez um conjunto de área zero.

2. Também há versões para as quais a mudança é um homeomorfismo h localmente lipschitziano com h^{-1} também localmente lipschitziana.

O Determinante $\det \varphi'(x)$ chama-se o **Jacobiano** de φ.

Definição 1.1. $g : \Omega \to \Omega_1$ é localmente lipschitziana se para cada $x \in \Omega$ existe $B(x,t)$ e $c_x \in \mathbb{R}$ com

$$|g(y) - g(z)| \leq c_x |y - z| \ ; \ \ y, z \in B(x, r)$$