

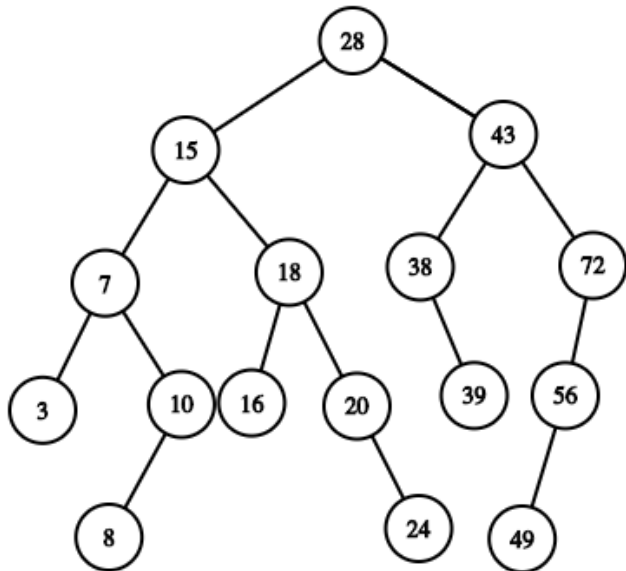
MAC121 - Algoritmos e Estruturas de Dados I

Universidade de São Paulo

Segundo Semestre de 2020

Árvores de Busca Binária

Remoção de ABBs



Remoção de ABBs

- ▶ Remove 8
- ▶ Remove 72
- ▶ Remove 18

Remoção de ABBs

se o elemento for uma folha, ok

se tiver apenas um filho, ok

se tiver dois filhos

troca pelo mínimo da subárvore direita

(ou pelo máximo da subárvore esquerda)

remove este elemento

Qual o consumo de tempo do algoritmo?

Altura esperada de uma ABB

Considere uma ABB construída de forma que os elementos foram inseridos em ordem aleatória. Qual a altura esperada desta árvore?

Quando um elemento é ancestral de outro numa ABB?

43 12 7 9 21 14 60 42 53 37 **19** 20 10 8

- ▶ Quais os ancestrais de 19?
 - ▶ Maiores que 19: 43 e 21;
 - ▶ Menores que 19: 12 e 14.

Altura esperada de ABB

Considere que os elementos entraram em ordem x_1, x_2, \dots, x_n .

Um elemento x_i é ancestral de x_j , $j > i$, no caso de $x_i > x_j$ dentre todos os elementos de $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ que são maiores que x_j , x_i é mínimo.

No caso em que $x_i < x_j$, ele será ancestral se dentre todos os elementos de $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ que são menores que x_j , x_i é máximo.

Altura esperada de ABB

Assim, fixado um certo x_j , podemos estimar a chance de que cada elemento anterior seja ancestral:

- ▶ x_1 é ancestral com probabilidade 1;
- ▶ x_2 é ancestral com probabilidade $\frac{1}{2}$;
- ▶ x_3 é ancestral com probabilidade $\frac{1}{3}$;
- ▶ \vdots

Ou seja, o número esperado de ancestrais de x_j vai ser dado pela soma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{j-1}$$

Já vimos que esta soma é limitada por $\ln n$. Ou seja, a altura esperada de um nó da árvore é $O(\log n)$.

Altura esperada de ABB

Mas, a altura da árvore é grande se houver um nó longe da raiz. A média pode ser $O(\log n)$ mas, ainda assim, a altura ser grande.

Podemos mostrar que isso não ocorre. A chance de que um nó esteja numa profundidade muito grande (algo como 5 vezes a média) é pequena:

$$\text{Prob}(\text{Prof} \geq 5 \cdot \ln n) \leq \frac{2}{n^2}$$

Usando o resultado acima, podemos mostrar que a altura esperada da árvore é $O(\log n)$.

Para saber mais

- ▶ Material sobre ABB (P. Feofiloff)
- ▶ Livro texto, capítulo 15.