2020-2, "FISMAT-AV", AULA 39

OBJETIVOS: APRESENTAR A FÓRMULA DE PLEMELJ ~~E AS RELAÇÕES DE KRAMERS-KRONIG (TRANSFORMADA DE HILBERT)~~

(CONT.) 4.5 VARIAÇÕES SOBRE O VP DE CAUCHY

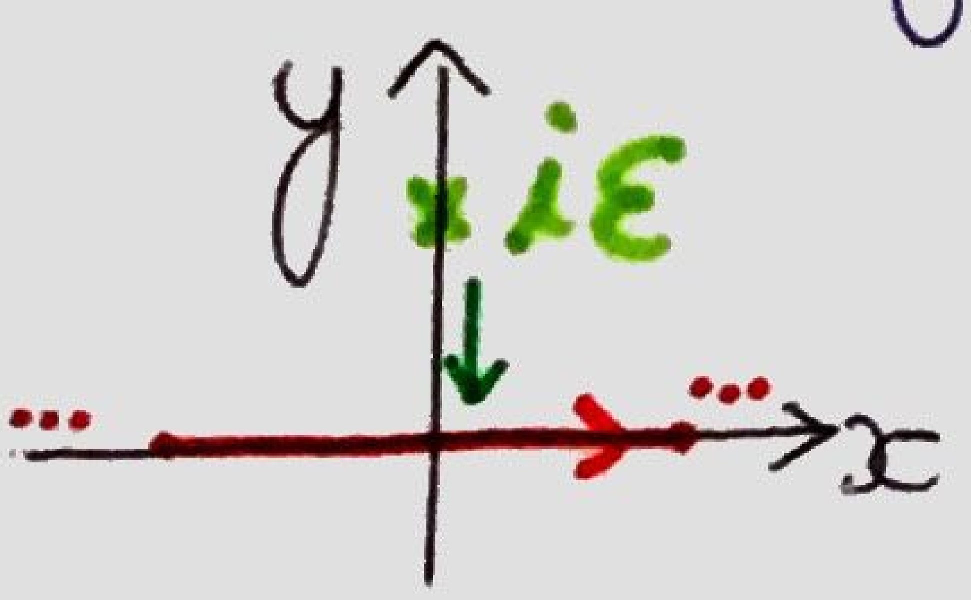
NA ÚLTIMA AULA, VIMOS QUE, PARA $\varepsilon > 0$,

$$f_\varepsilon(k) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{x - i\varepsilon}\, dx = \begin{cases} e^{-k\varepsilon}, & k>0 \\ 0, & k<0 \end{cases}$$

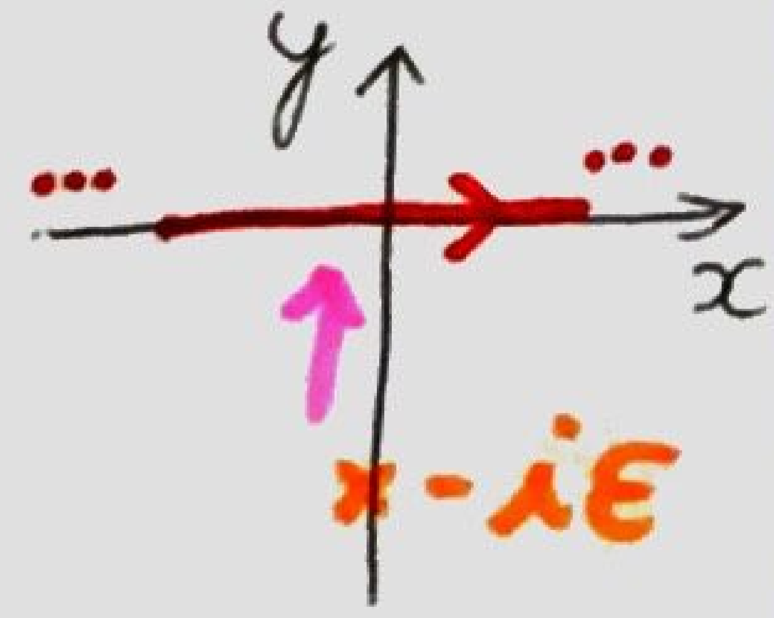
$$\Big\downarrow \, \varepsilon \to 0^+$$

$$H(k) \, .$$

NOTE QUE O LIMITE $\varepsilon \to 0^+$ CORRESPONDE AO PÓLO SIMPLES $+i\varepsilon$ "QUERER ATRAVESSAR O EIXO x", UM CORTE ONDE $f_\varepsilon(k)$ NÃO ESTÁ DEFINIDA.



HÁ UM NÍTIDO CONTRASTE ENTRE $H(k)$ E O RESULTADO QUE SERIA OBTIDO SE O PÓLO SIMPLES "CAMINHASSE" PARA A ORIGEM <u>POR</u> <u>BAIXO</u>: CÁLCULOS ANÁLOGOS ÀQUELES ORIGINAIS MOSTRAM QUE, SE $\varepsilon \to 0^-$, OU MELHOR, SE $\varepsilon \to 0^+$ MAS O INTEGRANDO TIVER $x + i\varepsilon$ NO DENOMINADOR, O RESULTADO SERIA

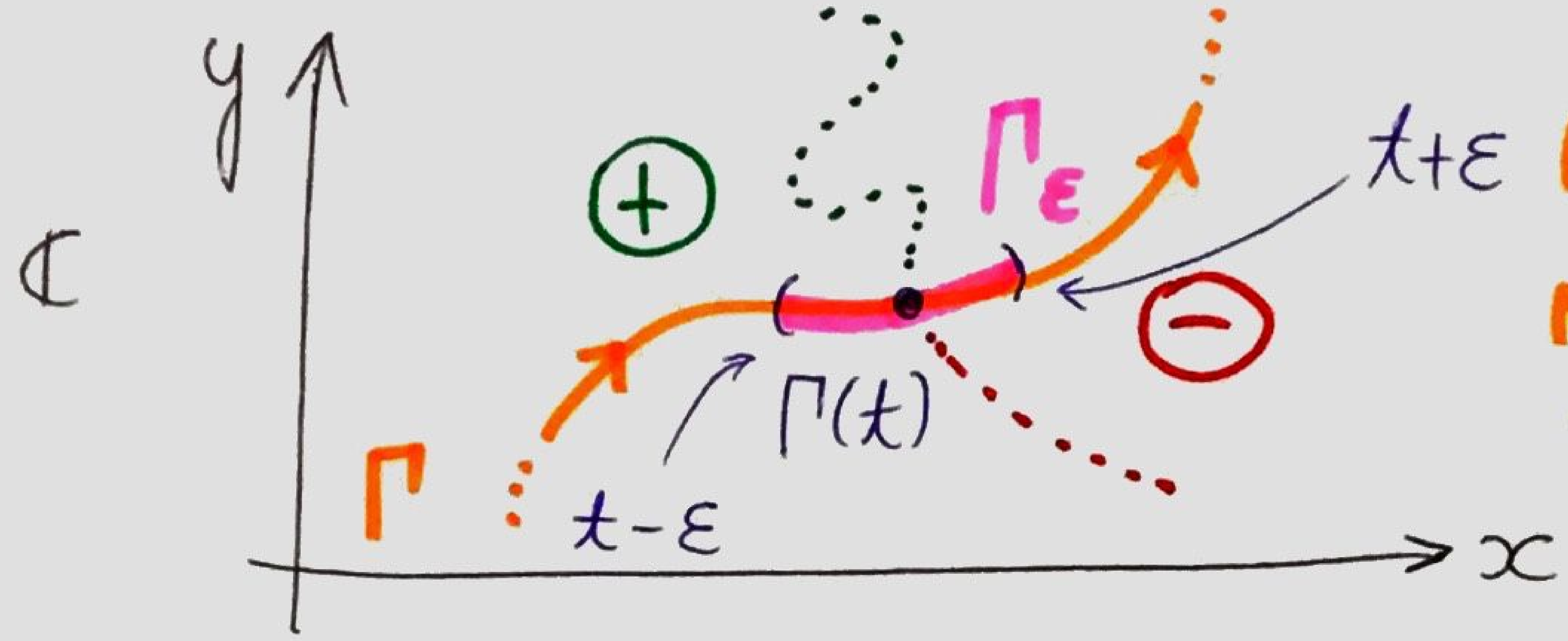


$$\begin{cases} 0, & k>0 \\ e^{+k\varepsilon}, & k<0 \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 1 - H(k).$$

VERIFIQUE! PARA QUALQUER k FIXADO, HÁ UMA <u>DESCONTINUIDADE</u> ENTRE OS LIMITES "ORIUNDOS DE DIFERENTES LADOS DO CORTE".

ESTE FOI UM EXEMPLO MUITO SIMPLES DA AMPLA FAMÍLIA DE <u>PROBLEMAS DE RIEMANN-HILBERT</u>, RELEVANTES EM DIVERSAS ÁREAS DE PROBLEMAS INVERSOS, ENTRE OUTRAS (ABLOWITZ & FOKAS, CAP. 7).

ESSES PROBLEMAS ENVOLVEM "CONDIÇÕES DE CONTORNO" QUANDO "SINGULARIDADES ATRAVESSAM CORTES".



Γ SUAVE POR PARTES, NÃO PRECISA SER FECHADO.

$$F(z_n^+) \longrightarrow F^+(t)$$

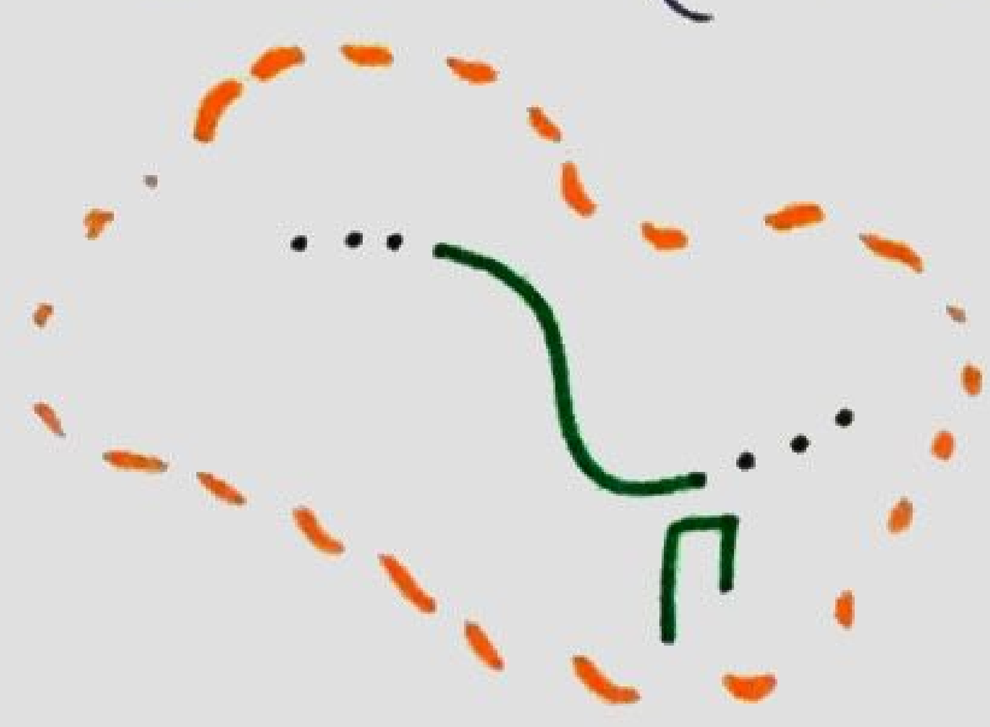
$$F(z_m^-) \longrightarrow F^-(t)$$

$$F^+(t) \neq F^-(t)$$

QUAL "É A CARA" DA FUNÇÃO F CONSIDERADA? BEM, SE $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ FOR CONTÍNUA EM UM ABERTO $U \subset \mathbb{C}$,

$$F(z) \equiv \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \quad , \Gamma \subset U,$$

SERÁ ANALÍTICA EM $U - \Gamma$ (SAFF & SNIDER, p. 207-208).



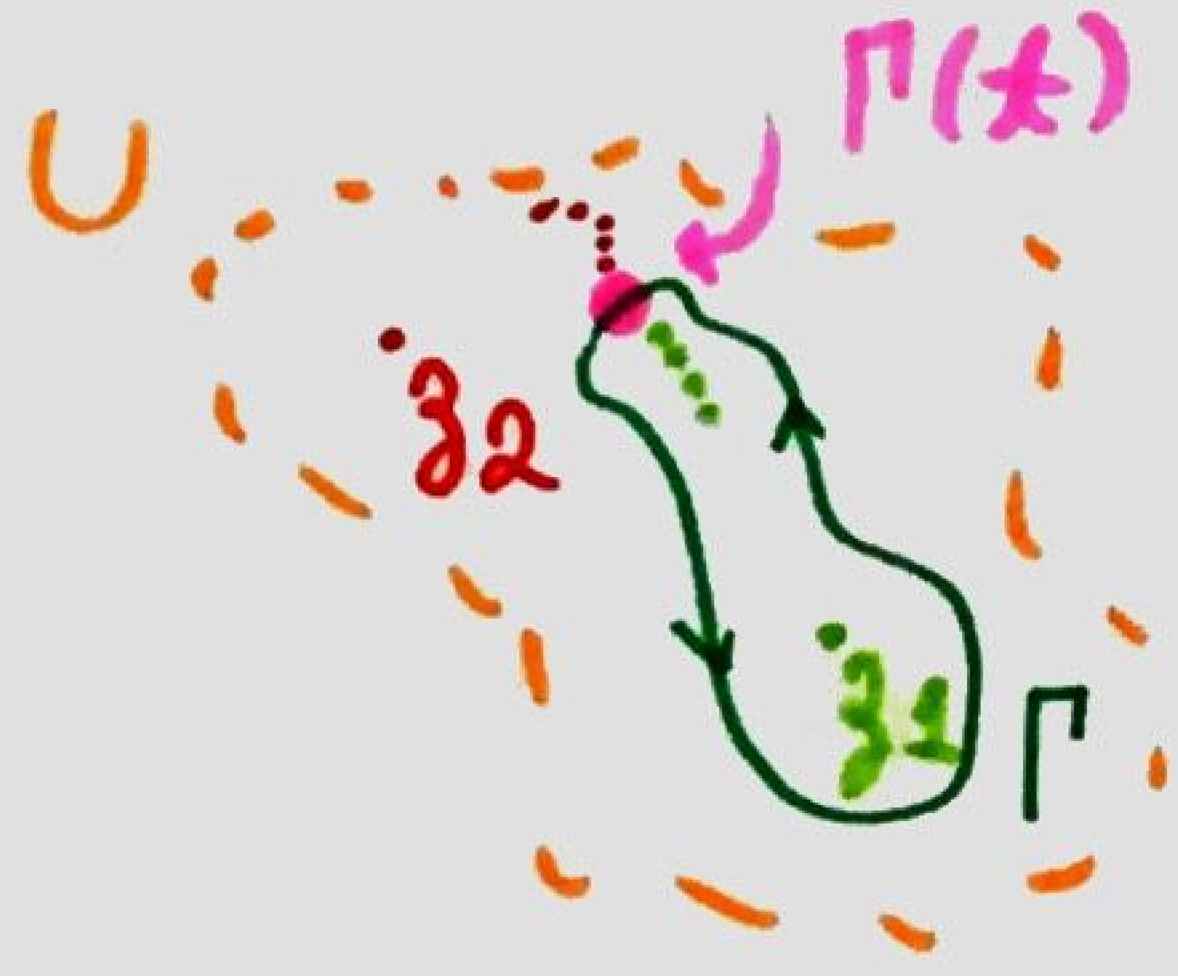
UM EXEMPLO CONCRETO (E FAMOSO) DESSA SITUAÇÃO É A FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY, f ANALÍTICA EM U,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi,$$

ONDE $z \in \operatorname{int} \Gamma$. INTERIOR

NESTE CASO, $F(z) = \begin{cases} 2\pi i\, f(z), & z \in \operatorname{int}\Gamma \\ 0, & z \in \operatorname{ext}\Gamma \end{cases}$

EXTERIOR



$F(z_1) = 2\pi i\, f(z_1)$

$F(z_2) = 0 \neq f(z_2)$

NOSSO PRINCIPAL INTERESSE, AGORA, É NÃO APENAS ESTUDAR "APROXIMAÇÕES AO CONTORNO Γ", MAS DAR SENTIDO A

$$F(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

QUANDO $z \in \Gamma$. ESTRITAMENTE FALANDO, A INTEGRAL É DIVERGENTE, MAS HÁ 3

"INTERPRETAÇÕES" POSSÍVEIS. $\to \Gamma_R$

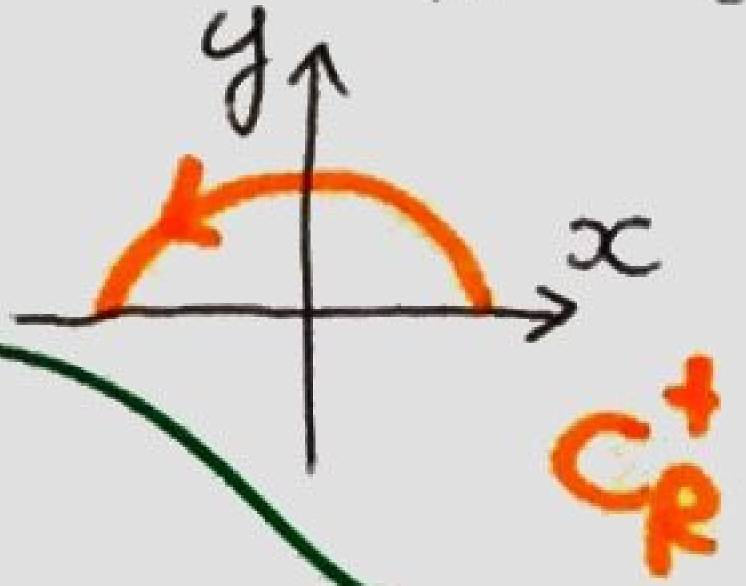
FAÇAMOS $\Gamma = (-\infty, +\infty)$, OU, MAIS PRECISAMENTE, $\Gamma = \boxed{(-R, +R)} \cup C_R^+$, NO LIMITE $R \to \infty$. NÃO FAZ DIFERENÇA, POIS ESCOLHEREMOS f QUE DECAIA SUFICIENTEMENTE RÁPIDO NO INFINITO.

$z \rightsquigarrow x_0 \in \mathbb{R}$

$z = x + iy \rightsquigarrow x$

$C_R^+ : (0, \pi) \to \mathbb{C}$,

$\varphi \mapsto R e^{i\varphi}$



MEROMÓRFICA, MAS ANALÍTICA EM $\mathbb{R}$.

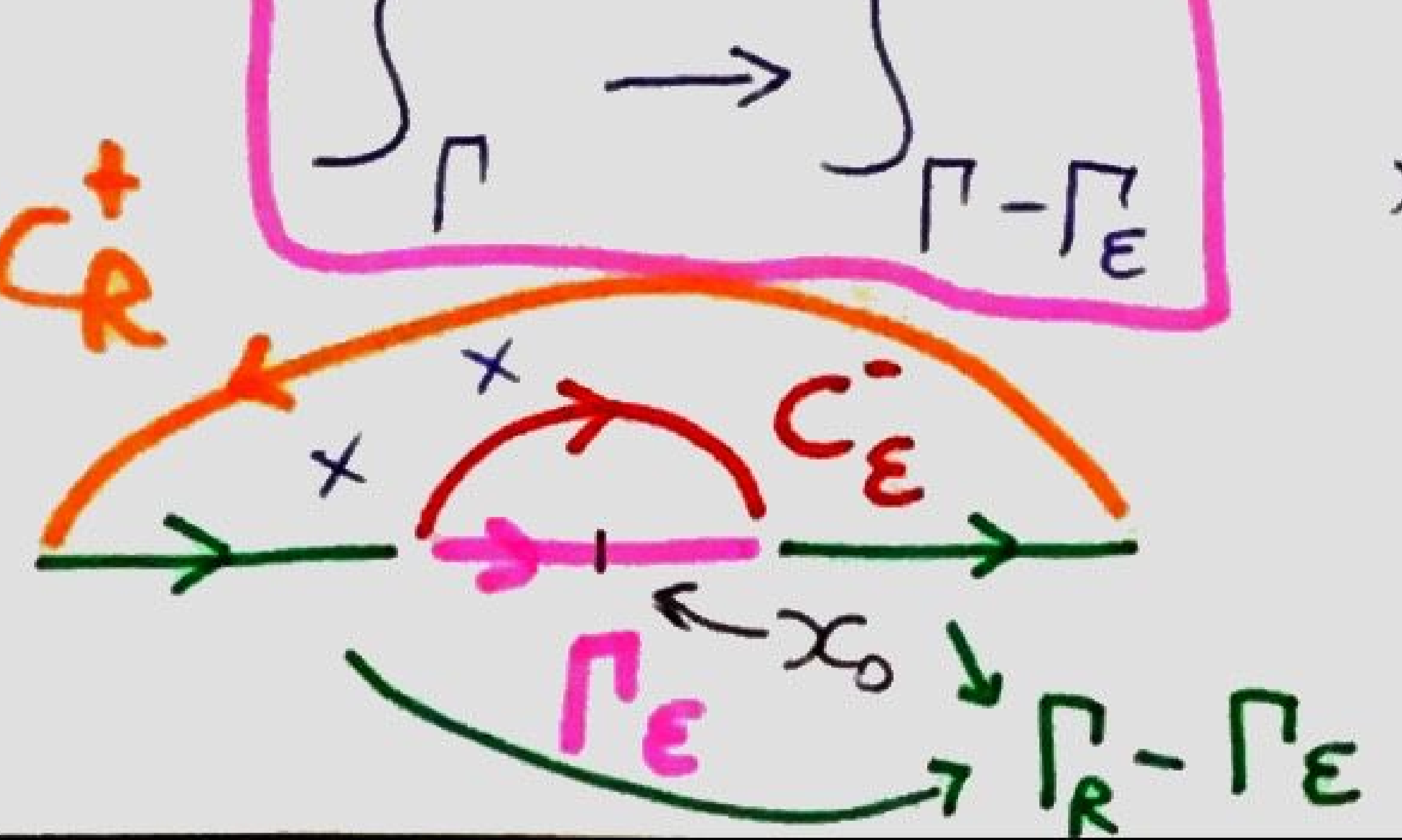
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx}$$

ANALÍTICA A MENOS DE SINGULARIDADES ISOLADAS

$f(x_0)$ É OK, MAS x_0 É PÓLO SIMPLES DE $F(z)$, O ÚNICO NA RETA REAL.

(i) INTERPRETAÇÃO DE VALOR PRINCIPAL

$$\boxed{\int_\Gamma \longrightarrow \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon}}\ , \qquad \Gamma_\varepsilon = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$



$C_\varepsilon^- : (0, \pi) \to \mathbb{C}$

$\varphi \mapsto \varepsilon . e^{i(\pi - \varphi)}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{\Gamma_R-\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-x_0}\,dz =$$

ZERO, NO LIMITE

$$= \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \left[\oint_{\Gamma_R-\Gamma_\varepsilon+C_\varepsilon^-+C_R^+} - \int_{C_\varepsilon^-} - \int_{C_R^+} \right] \frac{f(z)}{z-x_0}\,dz$$

$$= 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_j>0} \mathrm{RES}\left(\frac{f(z)}{z-x_0}\,;\, z_j\right) - \left\{-\pi i \underbrace{f(x_0)}_{\mathrm{RES}\left(\frac{f(z)}{z-x_0};\, x_0\right)}\right\} - 0 =$$

ORA, MAS $\displaystyle \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{\Gamma_R-\Gamma_\varepsilon} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx =$

$$= \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-x_0|>\varepsilon} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx$$

ESSE RESULTADO <u>NÃO</u> <u>DEPENDE</u> DA UTILIZAÇÃO DE C_ε^-. SE TIVÉSSEMOS USADO

$$\begin{cases} C_\varepsilon^+ : (0,\pi) \to \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \varepsilon . e^{i(\pi+\varphi)} \end{cases},$$

x_0 ESTARIA DENTRO DO CONTORNO FECHA-

DO E O RESULTADO SERIA

$$2\pi i \left\{ \text{RES}\left(\frac{f(z)}{z-x_0}; x_0\right) + \sum_{\text{Im}\, z_j > 0} \text{RES}\left(\frac{f(z)}{z-x_0}; z_j\right) \right\} -$$

$$- \left\{ + \pi i \, \text{RES}\left(\frac{f(z)}{z-x_0}; x_0\right) \right\},$$

O MESMO DE ANTES.

$$\boxed{\begin{gathered} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx \rightarrow VP\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx \\ \| \\ 2\pi i \sum_{\text{Im}\, z_j>0} \text{RES}\left(\frac{f(z)}{z-x_0}; z_j\right) + \pi i f(x_0) \end{gathered}}$$

(ii) $\boxed{\int_{\Gamma} \rightarrow \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon + C_\varepsilon^-} = \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon^-}}$

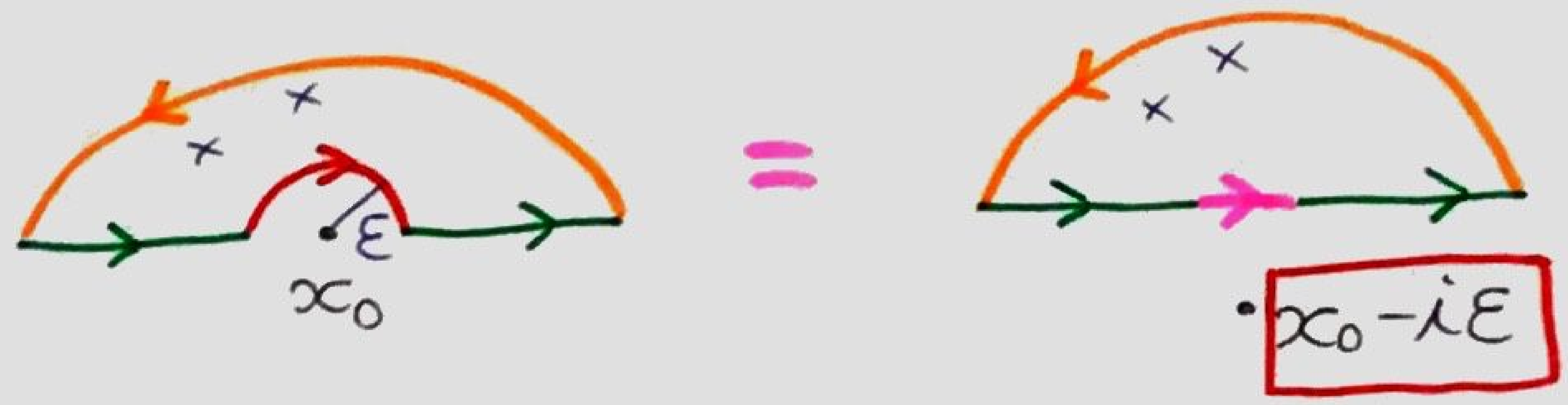
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx \rightarrow VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx - \pi i f(x_0)}$$

(iii) $\boxed{\int_{\Gamma} \rightarrow \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon + C_\varepsilon^+} = \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon^+}}$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx \rightarrow VP\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx + \pi i f(x_0)}$$

MATEMATICAMENTE, NÃO HÁ PREFERÊNCIA POR UMA INTERPRETAÇÃO. FISICAMENTE, UMA ESCOLHA PODE REPRESENTAR UMA OPÇÃO POR UMA SOLUÇÃO CAUSAL OU ANTI-CAUSAL DE UM PROBLEMA, OU DISTINGUIR ONDAS PROPAGANTES, ANTIPROPAGANTES E SUPERPOSIÇÕES ESTACIONÁRIAS DE AMBAS.

COM BASE NA INVARIÂNCIA POR DEFORMAÇÕES DE CONTORNOS FECHADOS, A ESCOLHA POR C_ε^- EQUIVALE A MANTER Γ_ε E "DESCER O PÓLO":



ANALOGAMENTE,

ASSIM, ADOTANDO A NOTAÇÃO DE FEYNMAN PARA DESLOCAR A SINGULARIDADE NAS INTERPRETAÇÕES (ii) E (iii),

EXCLUI O PÓLO

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\varepsilon}\, dx = VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx \mp \pi i\, f(x_0) \, .$$

INCLUI O PÓLO

SUBENTENDENDO O PRIMEIRO LIMITE (COMO JÁ OCORRE NO VP...) E PENSANDO EM DISTRIBUIÇÕES, PODEMOS ESCREVER QUE

$$\left\langle \frac{1}{x - x_0 \pm i\varepsilon}, f \right\rangle = \left\langle VP \frac{1}{x - x_0}, f \right\rangle \mp i\pi \left\langle \delta(x - x_0), f \right\rangle$$

E, SIMBOLICAMENTE, ESCREVEMOS

$$\boxed{\frac{1}{x - x_0 \pm i\varepsilon} = VP \frac{1}{x - x_0} \mp i\pi\, \delta(x - x_0)} \, .$$

ESTA EXPRESSÃO, OU VÁRIAS DAS EQUIVALENTES EXPRESSÕES ANTERIORES, É A FÓRMULA DE PLEMELJ, OU DE SOKHOTSKI-PLEMELJ.